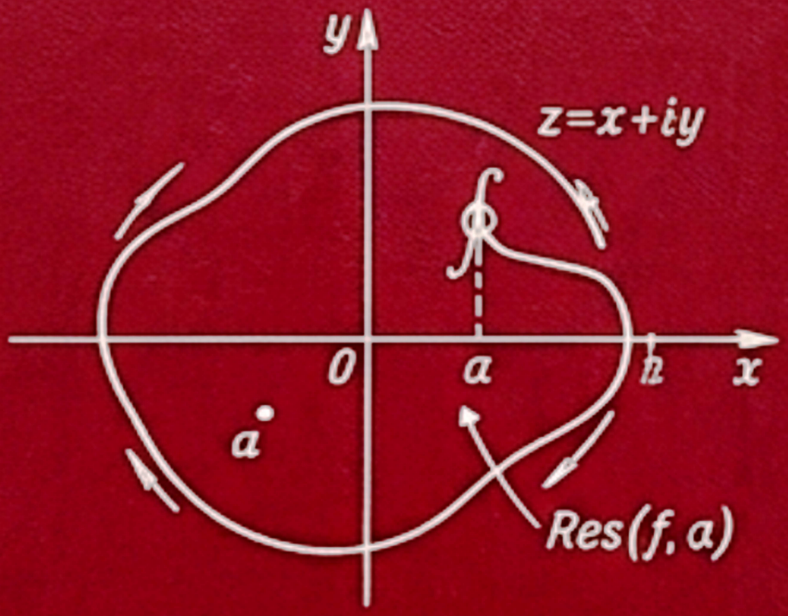
Р. М. ЖЕВНЯК
А. А. КАРПУК

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА



Часть 4

Р. М. ЖЕВНЯК,
А. А. КАРПУК

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ч. IV

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования БССР в качестве учебного пособия для студентов втузов

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1987

~~ББК 22.11я73~~
Ж 45
УДК 51(075.8)

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского энергетического института; *М. В. Федорюк*, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры высшей математики Московского физико-технического института

Жевняк Р. М., Карпук А. А.
Ж 45 Высшая математика: Учеб. пособие для втузов. Ч. IV.— Мн.: Выш. шк., 1987.—240 с.: ил.

Излагаются кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, элементы векторного анализа (теория поля), элементы теории уравнений математической физики, основы функций комплексного переменного и операционного исчисления.
Для студентов технических специальностей вузов.

1702010000—023
Ж М 304(03)—87 19—87

ББК 22.11я73

Ростислав Михайлович Жевняк,
Андрей Андреевич Карпук

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.Ч.IV

Зав. редакцией Е. В. Сукач. Редактор Л. Н. Базулько. Мл. редактор В. М. Кушнилевич. Обложка и худож. редактирование Ю. С. Сергачева. Техн. редактор И. П. Тихонова. Корректоры Б. В. Никанович, И. В. Моковикова.

ИБ № 2321

Сдано в набор 21.07.86. Подписано в печать 13.02.87. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 15. Усл. кр.-отт. 15,25. Уч.-изд. л. 16,34. Тираж 8100 экз. Зак. 2705. Цена 75 к.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220048, Минск, проспект Машерова, 11.

Минский ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат МППО им. Я. Коласа. 220005, Минск, ул. Красная, 23.

© Издательство «Вышэйшая школа», 1987.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

11. Кратные интегралы 5

11.1. Двойные и тройные интегралы 5
11.2. Замена переменных в кратных интегралах 23
11.3. Приложения кратных интегралов 36
11.4. Кратные несобственные интегралы 44

12. Криволинейные и поверхностные интегралы 49

12.1. Криволинейные интегралы 49
12.2. Формула Грина 57
12.3. Поверхностные интегралы 68
12.4. Формулы Остроградского и Стокса 80

13. Элементы теории поля 89

13.1. Скалярные и векторные поля 89
13.2. Поток векторного поля через поверхность 92
13.3. Циркуляция векторного поля 98
13.4. Соленоидальные и потенциальные поля 101
13.5. Дифференциальные операции второго порядка 104

14. Элементы теории уравнений математической физики 112

14.1. Вывод основных уравнений математической физики 112
14.2. Основные понятия теории уравнений математической физики . . 117
14.3. Методы решения уравнений математической физики 128

15. Элементы теории функций комплексной переменной 140

15.1. Функции комплексной переменной 140
15.2. Дифференцирование функций комплексной переменной 154
15.3. Интегрирование функций комплексной переменной 165
15.4. Ряды в комплексной области 175
15.5. Нули и изолированные особые точки аналитических функций . . . 189
15.6. Вычеты и их приложения 194

16. Операционное исчисление 211

16.1. Преобразование Лапласа 211
16.2. Нахождение оригинала по изображению 227
16.3. Решение дифференциальных уравнений операционным методом . . 232

Литература 239

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга является четвертой частью учебного пособия «Высшая математика». В ней рассматриваются кратные интегралы, криволинейные и поверхностные интегралы, элементы векторного анализа (теории поля), элементы теории уравнений математической физики, основы функций комплексного переменного и операционного исчисления.

Пособие написано на основе лекций по высшей математике, читаемых авторами в Минском радиотехническом институте. Большое количество типовых задач и упражнений с подробными решениями, иллюстрирующих теоретические положения, делает книгу вполне доступной и для студентов вечернего и заочного отделений.

Программой курса высшей математики для втузов предусмотрено выполнение типовых расчетов. Предлагаемое пособие написано таким образом, что студент, усвоивший изложенный в нем материал, справится с выполнением следующих типовых расчетов: «Кратные интегралы», «Теория поля», «Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление».

Сложные доказательства некоторых теорем, выходящие за рамки курса высшей математики для втузов, в книге не приводятся. Их можно найти в других учебных пособиях, список которых помещен в конце книги.

Нумерация глав, параграфов, формул в этой части продолжает нумерацию первых трех частей книги. Начало доказательства теорем, решений примеров и задач отмечено знаком □, конец доказательства — знаком ■.

В процессе работы над книгой ряд ценных советов дали сотрудники кафедры высшей математики МРТИ доценты Н. Н. Гриневич, Л. А. Конюх, В. А. Липницкий, О. А. Феденя, которым авторы глубоко признательны. Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность доктору физико-математических наук, профессору кафедры высшей математики Московского физико-технического института М. В. Федорюку, заведующему кафедрой высшей математики Московского энергетического института, члену-корреспонденту АН СССР, доктору физико-математических наук,

профессору С. И. Похожаеву, профессору М. Л. Краснову и доценту А. И. Киселеву, а также доценту кафедры высшей математики Московского института инженеров транспорта Г. И. Макаренко за высказанные ими при рецензировании полезные замечания, способствовавшие улучшению содержания пособия. Особую благодарность авторы выражают заведующему кафедрой высшей математики МФТИ, члену-корреспонденту АН СССР, доктору физико-математических наук, профессору Л. Д. Кудрявцеву.

Все замечания и пожелания просьба направлять по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

11. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

11.1. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Области и кривые на плоскости. Пусть на плоскости XY задана область D с кусочно-гладкой границей Γ (рис. 11.1). Напомним, что область D — это открытое связное множество, т. е. такое множество, для любой точки M которого существует ε-окрестность $U_\varepsilon(M) \subset D$, и две любые точки M_1 и M_2 из D можно соединить непрерывной кривой, полностью расположенной в D. Точка M_0 называется *граничной* для D, если в любой ее окрестности $U_\delta(M_0)$ имеются как принадлежащие, так и не принадлежащие D точки. Совокупность граничных точек области D образует ее *границу*. *Диаметром* области D называется величина $d = \sup\limits_{M_1, M_2 \in D} \rho(M_1, M_2)$, где $\rho(M_1, M_2)$ — расстояние между точками M_1 и M_2 из D. Область D называется *ограниченной*, если ее диаметр — конечное число.

Пусть l — кривая на плоскости XY (рис. 11.2), параметрические уравнения которой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta] = I$. Кривая l называется *гладкой*, если:

1) функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на I и $\vec{\tau} = (\varphi'(t), \psi'(t)) \neq 0$, $\forall t \in I$;

2) l не имеет точек самопересечения.

Если l — замкнутая кривая, т. е. $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$, то требуется дополнительно, чтобы $\varphi'(\alpha) = \varphi'(\beta)$, $\psi'(\alpha) = \psi'(\beta)$.

Вектор $\vec{\tau}(t)$ является направляющим вектором касательной к кривой l в точке $(x(t), y(t)) \in l$.

Пусть кривая l задана явно уравнением $y = f(x)$, $x \in (a, b)$. Она называется гладкой, если функция f имеет непрерывную производную $f'(x)$, $\forall x \in (a, b)$.

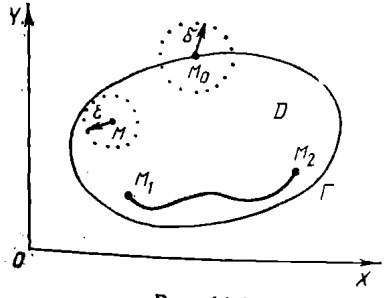


Рис. 11.1

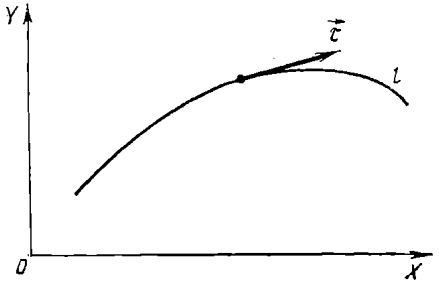


Рис. 11.2

Кривая, состоящая из конечного числа гладких кривых и не имеющая точек самопересечения, называется *кусочно-гладкой.*

Задачи, приводящие к двойному интегралу. Рассмотрим некоторые физические задачи, которые приводят к понятию двойного интеграла.

1. Объем криволинейного цилиндра. Пусть $z = f(x, y)$ — неотрицательная, непрерывная в замкнутой ограниченной области D функция, т. е. $f(x, y) \geqslant 0$, $\forall (x, y) \in D$. В трехмерном пространстве уравнение $z = f(x, y)$ определяет некоторую поверхность S, проекция которой на плоскость XY совпадает с D (рис. 11.3). Требуется найти объем v тела V, ограниченного сверху поверхностью S, снизу областью D с границей Γ и цилиндрической поверхностью с направляющей Γ и образующими, параллельными оси Z. Такое тело называется *криволинейным цилиндром.*

Разобьем область D на n частичных областей D_i с кусочно-гладкими границами Γ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Через границу Γ_i проведем цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Z. Эти поверхности разобьют тело V на n столбиков V_i, объем каждого из которых приближенно равен

$$\Delta v_i = f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где (ξ_i, η_i) — произвольная точка области D_i; Δs_i — площадь области D_i. Тогда объем всего тела V приближенно выразится суммой

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_i.$$

Пусть d_i — диаметр области D_i, а $\Delta = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i$. Тогда точное значение объема представится в виде предела:

$$v = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_i.$$

Этот предел (если он существует) обозначается $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$ и называется *двойным интегралом от функции* $f(x, y)$ *по области* D.

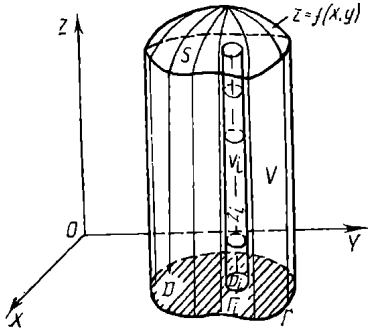


Рис. 11.3

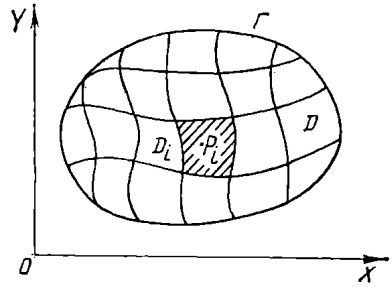


Рис. 11.4

Таким образом, объем криволинейного цилиндра, ограниченного поверхностью $z = f(x, y) \geqslant 0$, $\forall (x, y) \in D$, областью D, цилиндрической поверхностью с направляющей Γ и образующими, параллельными оси z,

$$v = \iint_D f(x, y)\, dxdy. \tag{11.1}$$

2. Масса плоской пластинки. Пусть D — плоская пластинка, по поверхности которой непрерывно распределена масса с плотностью $\mu = \mu(x, y)$. Требуется найти массу этой пластинки.

Разобьем пластинку D с помощью кусочно-гладких дуг произвольным образом на n частей D_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (рис. 11.4). Предполагая плотность μ в каждой части D_i постоянной и равной $\mu(\xi_i, \eta_i)$, где $P_i = (\xi_i, \eta_i)$ — произвольная точка D_i, получим приближенно массу части D_i: $\Delta m_i \approx \mu(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_i$, где Δs_i — площадь D_i. Тогда масса всей пластинки D приближенно равна $\sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_i$. Точная же масса m всей пластинки выразится предельным переходом при $\Delta = \max d_i \to 0$, т. е.

$$m = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_i = \iint_D \mu(x, y)\, dxdy. \tag{11.2}$$

Определение двойного интеграла. Пусть в области D с кусочно-гладкой границей Γ задана непрерывная функция $f(x, y)$. Разобьем область D кусочно-гладкими дугами на n частичных областей D_i, площади которых Δs_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. В каждой частичной области D_i выберем произвольную точку (ξ_i, η_i) и составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_i, \tag{11.3}$$

называемую *интегральной суммой Римана*. Обозначим через Δ наибольший из диаметров областей D_i и назовем его *диаметром разбиения*. Рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_i. \tag{11.4}$$

Если существует этот предел, не зависящий ни от способа разбиения области D на части D_i, ни от выбора точек $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, то говорят, что функция $f(x, y)$ *интегрируема по Риману в области* D, а сам предел называют *двойным интегралом от функции* $f(x, y)$ *по области* D и обозначают $\iint_D f(x, y)\, dxdy$.

Итак, по определению,

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_i. \tag{11.5}$$

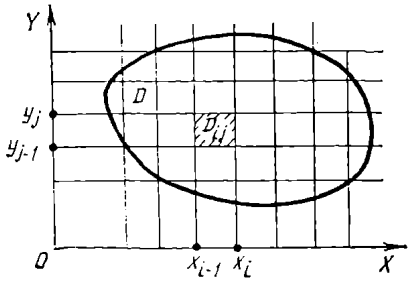


Рис. 11.5

Отметим, что интеграл от функции $f(x, y)$ по области D есть некоторое число. Кроме того, справедливо равенство

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_D f(u, v)\,dudv,$$

т. е. для интеграла безразлично, какими буквами обозначены аргументы функции f.

Предел (11.5) не должен зависеть от способа разбиения области D на части D_i и выбора точек $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$. Поэтому, если предел (11.5) существует, можно область D разбивать на части D_i прямыми, параллельными осям координат (рис. 11.5).

Пусть D_{ij} — прямоугольник со сторонами $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, лежащий внутри области D. Его площадь равна $\Delta x_i \Delta y_j$. Соответствующая такому разбиению области D интегральная сумма имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\,\Delta x_i \Delta y_j, \quad x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i; \quad x_{j-1} \leqslant \eta_j \leqslant y_j.$$

Тогда, согласно равенству (11.5), получаем

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0}} \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\,\Delta x_i \Delta y_j \right). \qquad (11.6)$$

Как и для интеграла Римана от функции одной переменной, доказывается следующая

Теорема 11.1. Для того чтобы функция $f(x, y)$ была интегрируемой в области D, необходимо, чтобы $f(x, y)$ была ограничена на D.

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 5.5, ч. II, можно прийти к следующей теореме.

Теорема 11.2. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D. Тогда двойной интеграл (11.5) существует.

Функция $f(x, y)$ называется *кусочно-непрерывной в области D*, если она определена и непрерывна во всех точках этой области, за исключением, быть может, точек, принадлежащих конечному числу кусочно-гладких линий, лежащих в D.

Теорема 11.3. Пусть D — ограниченная замкнутая область и $f(x, y)$ — кусочно-непрерывная ограниченная в этой области функция. Тогда интеграл (11.5) существует.

Свойства двойного интеграла. Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — интегрируемые в области D функции. Справедливы следующие свойства двойных интегралов.

1°. $\iint\limits_D 1 \cdot dxdy = \iint\limits_D dxdy = S,$ (11.7)

где S — площадь области D.

□ Полагая в равенстве (11.5) $f(x, y) = 1$, получаем

$$\iint\limits_D dxdy = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = S. \blacksquare$$

2°. (Линейность.) Для любых α и β из $\mathbf{R}$

$$\iint\limits_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]\, dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy + \beta \iint\limits_D g(x, y)\, dxdy. \tag{11.8}$$

□ По определению,

$$\iint [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]\, dxdy = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\alpha f(\xi_i, \eta_i) + \beta g(\xi_i, \eta_i)]\, \Delta s_i =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \alpha f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_i + \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \beta g(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i =$$

$$= \alpha \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_i + \beta \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_i =$$

$$= \alpha \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy + \beta \iint\limits_D g(x, y)\, dxdy. \blacksquare$$

3°. (Аддитивность.) Пусть область D является объединением двух областей D_1 и D_2, не имеющих общих внутренних точек (рис. 11.6). Тогда

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\, dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\, dxdy. \tag{11.9}$$

□ Пусть D_i — ячейки разбиения области $D = D_1 \cup D_2$. Обозначим через D_{i1} ячейки разбиения, принадлежащие D_1, а через D_{i2} — ячейки, принадлежащие D_2. Тогда ($n = n_1 + n_2$)

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_i =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_{i1} + \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n_2} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_{i2} =$$

$$= \iint\limits_{D_1} f(x, y)\, dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\, dxdy. \blacksquare$$

4°. Если $f(x, y) \geqslant 0$, $\forall (x, y) \in D$, то $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy \geqslant 0$.

5°. Если $f(x, y) \geqslant g(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$, то $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy \geqslant \iint\limits_D g(x, y)\, dxdy$.

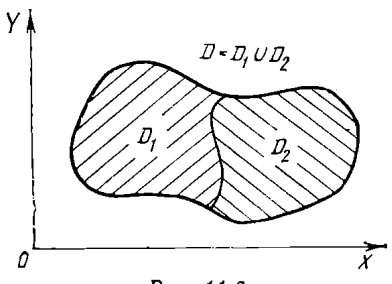


Рис. 11.6

Доказательства свойств 4° и 5° повторяют доказательства соответствующих свойств определенного интеграла.

6°. (Оценка модуля интеграла.) Имеет место соотношение

$$\left|\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x, y)|\,dxdy. \qquad (11.10)$$

□ Так как $-|f(x, y)| \leqslant f(x, y) \leqslant |f(x, y)|$, то, согласно свойству 5°,

$$-\iint\limits_D |f(x, y)|\,dxdy \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy \leqslant \iint\limits_D |f(x, y)|\,dxdy,$$

что равносильно неравенству (11.10). ■

7°. Пусть $M = \max\limits_{(x, y) \in D} f(x, y)$, $m = \min\limits_{(x, y) \in D} f(x, y)$. Тогда справедлива *формула оценки двойного интеграла*

$$mS \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy \leqslant MS, \qquad (11.11)$$

где S — площадь области D.

□ Действительно, так как $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$, то

$$\iint\limits_D m\,dxdy \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy \leqslant \iint\limits_D M\,dxdy,$$

откуда с учетом свойств 1° и 2° получаем соотношения (11.11). ■

8°. Пусть D — прямоугольник $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ (рис. 11.7) и $f(x, y) = \varphi(x)\,g(y)$. Тогда

$$\iint\limits_D \varphi(x)\,g(y)\,dxdy = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \int\limits_c^d g(y)\,dy. \qquad (11.12)$$

□ Прямыми, параллельными координатным осям, разбиваем прямоугольник D на более мелкие прямоугольники D_{ij}, площади которых равны $\Delta x_i \Delta y_j$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Согласно равенству (11.6), получаем

$$\iint\limits_D \varphi(x)\,g(y)\,dxdy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0}} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi(\xi_i)\,g(\eta_j)\,\Delta x_i \Delta y_j \right) =$$

$$= \left(\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{m} \varphi(\xi_i)\,\Delta x_i \right) \left(\lim_{\max \Delta y_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} g(\eta_j)\,\Delta y_j \right) =$$

$$= \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \int\limits_c^d g(y)\,dy. \blacksquare$$

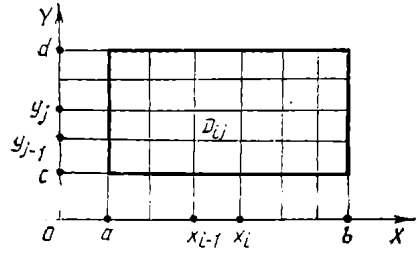


Рис. 11.7

9°. (Теорема о среднем.) Пусть $f(x, y)$ — функция, непрерывная в ограниченной замкнутой связной области D. Тогда существует точка $(\xi, \eta) \in D$, такая, что

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = f(\xi, \eta)\,S, \qquad (11.13)$$

где S — площадь области D.

□ Из неравенства (11.11) имеем

$$m \leqslant \frac{1}{S} \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy \leqslant M. \qquad (11.14)$$

Пусть $A = (x_0, y_0)$ и $B = (x_1, y_1)$ — точки из D, в которых функция $f(x, y)$ принимает максимальное M и минимальное m значения соответственно, т. е. $f(x_0, y_0) = M$, а $f(x_1, y_1) = m$. Соединим точки A и B непрерывной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, такой, что $x(\alpha) = x_0$, $y(\alpha) = y_0$, $x(\beta) = x_1$, $y(\beta) = y_1$. В точках этой кривой значения функции $f(x(t), y(t)) = F(t)$ одной переменной t образуют отрезок $[m, M]$. По теореме 2.14, ч. I, она принимает и все промежуточные значения между m и M. Согласно неравенству (11.14), число $\iint\limits_D \frac{1}{\quad} f(x, y)\, dxdy$ принадлежит отрезку $[m, M]$.

Тогда найдется такое t_0, что

$$F(t_0) = f(x(t_0), y(t_0)) = f(\xi, \eta) = \frac{1}{S} \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy,$$

где $\xi = x(t_0)$; $\eta = y(t_0)$. ■

Число

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{S} \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy \qquad (11.15)$$

называется *средним значением функции* $f(x, y)$ *в области* D.

10°. (Производная двойного интеграла по области интегрирования.) Пусть масса некоторого вещества распределена непрерывно с плотностью $\mu(x, y)$ по ограниченной связной области D. Для определения плотности вещества в точке $(x_0, y_0) = P_0 \in D$ рассмотрим некоторую ее окрестность $U_\varepsilon(P_0)$ площадью Δs. Разделив массу, содержащуюся в этой окрестности, на площадь Δs, получим *среднюю плотность* вещества в окрестности $U_\varepsilon(P_0)$. Предел средней плотности при стремлении диаметра окрестности к нулю (если он существует и не зависит от выбора последовательности окрестностей $U_\varepsilon(P_0)$) называется *плотностью вещества в точке* P_0.

Пусть S — площадь области D, а $m = \iint\limits_D \mu(x, y)\, dxdy$ — ее масса. Тогда средняя плотность вещества в D равна $\frac{1}{S} \iint\limits_D \mu(x, y)\, dxdy$.

Но, согласно равенству (11.13),

$$\frac{1}{S} \iint\limits_D \mu(x, y)\, dxdy = \mu(\xi, \eta),$$

где (ξ, η) — некоторая точка области D.

При стягивании области D в точку P_0 $(d \to 0)$ вследствие непрерывности функции $\mu(x, y)$ получим соотношение

$$\lim_{d\to 0}\frac{1}{S}\iint_D \mu(x,\ y)\,dxdy = \lim_{(\xi,\ \eta)\to(x_0,\ y_0)} \mu(\xi,\ \eta) = \mu(x_0,\ y_0).$$

Этот предел называется *производной двойного интеграла по области D в точке $P_0 = (x_0,\ y_0)$*.

Итак, если $\mu(x,\ y)$ — непрерывная в области D функция, то производная двойного интеграла по области интегрирования равна подынтегральной функции.

Сведение двойного интеграла к повторному. Вычисление двойных интегралов сводится к последовательному вычислению однократных интегралов.

1. Случай прямоугольной области. Пусть область интегрирования есть прямоугольник $D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ со сторонами, параллельными координатным осям (рис. 11.7), и $f(x,\ y)$ — непрерывная в этой области функция. Если зафиксировать $y \in [c,\ d]$, то функция $f(x,\ y)$ будет непрерывной функцией аргумента x. Следовательно, существует интеграл $F(y) = \int_a^b f(x,\ y)\,dx$, который, согласно теореме 7.1, ч. II, является непрерывной функцией переменной $y \in [c,\ d]$. Поэтому функцию $F(y)$ можно интегрировать на отрезке $[c,\ d]$. В итоге получится повторный интеграл

$$\int_c^d F(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,\ y)\,dx\right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,\ y)\,dx. \qquad (11.16)$$

Этот процесс можно проделать в обратном порядке: сначала вычислить функцию от x, определенную равенством $\Phi(x) = \int_c^d f(x,\ y)\,dy$, а затем функцию Φ проинтегрировать по x от a до b. В результате получим другой повторный интеграл

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,\ y)\,dy\right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,\ y)\,dy. \qquad (11.17)$$

Справедлива

Теорема 11.4. Пусть функция $f(x,\ y)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике D. Тогда имеет место равенство

$$\iint_D f(x,\ y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,\ y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,\ y)\,dx. \qquad (11.18)$$

□ Заметим, что равенство повторных интегралов (11.16) и (11.17) установлено в теореме 7.3, ч. II.

Пусть

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b;$$

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = d$$

есть разбиения сторон прямоугольника D. Имеем

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,\ y)\, dy \right) dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_c^d f(x,\ y)\, dy \right) dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,\ y)\, dy \right) dx = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,\ y)\, dy \right) dx. \tag{11.19}$$

Применив теорему о среднем к интегралу $\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)\, dx$, где $\varphi(x) = \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,\ y)\ dy$, получим

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)\, dx = \varphi(\xi_i)\, \Delta x_i = \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i,\ y)\, dy \right) \Delta x_i,\ x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}.$$

Еще раз применив теорему о среднем, найдем

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,\ y)\, dy \right) dx = f(\xi_i,\ \eta_j)\, \Delta x_i \Delta y_j,\ y_j \leqslant \eta_j \leqslant y_{j+1}.$$

Таким образом, равенство (11.19) приобретает вид

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,\ y)\, dy \right) dx = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_i,\ \eta_j)\, \Delta x_i \Delta y_j. \tag{11.20}$$

Пусть теперь $\max \Delta x_i \to 0$ и $\max \Delta y_j \to 0$. Так как функция f интегрируема на D, из равенства (11.20) получаем соотношение

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,\ y)\, dy \right) dx = \iint_D f(x,\ y)\, dx dy. \blacksquare$$

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \iint_D (6x^2y + 8xy^3)\, dxdy$, где D: $1 \leqslant x \leqslant 2$, $3 \leqslant y \leqslant 4$.

□ Имеем

$$I = \iint\limits_{\substack{1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3 \leqslant y \leqslant 4}} (6x^2y + 8xy^3)\ dxdy = \int_3^4 \left(\int_1^2 (6x^2y + 8xy^3)\ dx \right) dy.$$

Во внутреннем интеграле интегрирование ведем по x, считая y постоянным. Поэтому

$$\int_1^2 (6x^2y + 8y^3x)\, dx = (2x^3y + 4y^3x^2)\Big|_{x=1}^{x=2} = 14y + 12y^3.$$

Тогда

$$I = \int_3^4 (14y + 12y^3)\, dy = (7y^2 + 3y^4)\Big|_3^4 = 574.$$

С другой стороны,

$$\iint\limits_{\substack{1\leqslant x\leqslant 2\\ 3\leqslant y\leqslant 4}} (6x^2y+8y^3x)\,dxdy=\int\limits_1^2\left(\int\limits_3^4 (6x^2y+8y^3x)\,dy\right)dx=$$

$$=\int\limits_1^2 (3x^2y^2+2xy^4)\Big|_{y=3}^{y=4}dx=\int\limits_1^2 (21x^2+350x)\,dx=574.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I=\iint\limits_D \dfrac{xdxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$ по прямоугольнику $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

□ Прежде всего нужно решить, какой из формул (11.18) лучше воспользоваться. Так как интеграл по x вычисляется проще, поступим следующим образом. Имеем

$$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 \frac{d(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}=$$

$$=-\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Big|_{x=0}^{x=1}dy=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{y^2+2}}\right)dy=$$

$$=\ln\frac{y+\sqrt{y^2+1}}{y+\sqrt{y^2+2}}\Big|_0^1=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

2. Случай криволинейной области. Пусть область D ограничена двумя непрерывными кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$, $\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)$, и вертикальными отрезками $x=a$ и $x=b$ (рис. 11.8). Пусть любая прямая, параллельная оси Y, пересекает границу области D не более чем в двух точках. Тогда справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy. \qquad (11.21)$$

Здесь вначале функцию $f(x,\ y)$ интегрируем по переменной y от $y=\varphi_1(x)$ до $y=\varphi_2(x)$, считая x постоянным, а затем результат интегрируем по x на отрезке $[a,\ b]$.

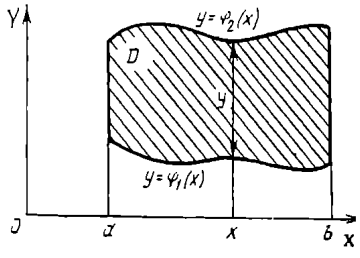


Рис. 11.8

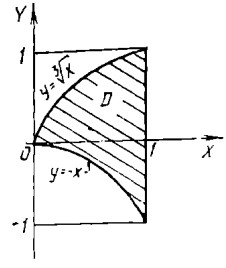


Рис. 11.9

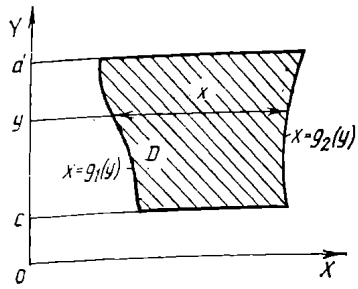


Рис. 11.10

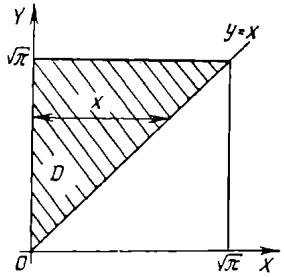


Рис. 11.11

Пример 3. Вычислить интеграл $I=\iint\limits_D\left(3x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4\right)dxdy$, где D — область, ограниченная линиями $x=1$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=-x^3$ (рис. 11.9).

□ Согласно равенству (11.21),

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-x^3}^{\sqrt[3]{x}}\left(3x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4\right)dy=\int\limits_0^1\left(x^2y^3+\frac{10}{3}x^4y^5\right)\Big|_{y=-x^3}^{y=\sqrt[3]{x}}dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x^3+\frac{10}{3}x^{17/3}+x^{11}+\frac{10}{3}x^{19}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}x^{20/3}+\frac{x^{12}}{12}+\frac{x^{20}}{6}\right)\Big|_0^1=1.$$

Если же область D определяется неравенствами $c\leqslant y\leqslant d$, $g_1(y)\leqslant x\leqslant g_2(y)$ (рис. 11.10), где $g_1(y)$ и $g_2(y)$ — непрерывные на отрезке $[c,\ d]$ функции, и любая прямая, параллельная оси X, пересекает границу области не более чем в двух точках, то

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)}f(x,\ y)\,dx. \qquad (11.22)$$

Пример 4. Вычислить интеграл $I=\iint\limits_D y^2\sin\frac{xy}{2}\,dxdy$, где D — область, ограниченная прямыми $x=0$, $y=\sqrt{\pi}$, $y=x$ (рис. 11.11).

□ Согласно формуле (11.22),

$$I=\int\limits_0^{\sqrt{\pi}}dy\int\limits_0^y y^2\sin\frac{xy}{2}\,dx=-2\int\limits_0^{\sqrt{\pi}}y\cos\frac{xy}{2}\Big|_{x=0}^{x=y}dy=$$

$$=-2\int\limits_0^{\sqrt{\pi}}\left(y\cos\frac{y^2}{2}-y\right)dy=-2\int\limits_0^{\sqrt{\pi}}\cos\frac{y^2}{2}\,d\left(\frac{y^2}{2}\right)+y^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}}=$$

$$=-2\sin\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{\pi}}+\pi=\pi-2.$$

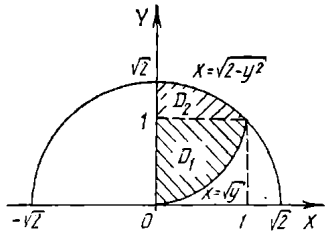


Рис. 11.12

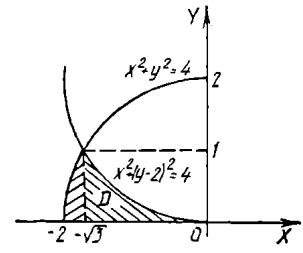


Рис. 11.13

Произвольную область с кусочно-гладкой границей можно разбить на конечное число областей, каждая из которых имеет вид, показанный на рис. 11.8 или 11.10. Поэтому вычисление двойного интеграла всегда сводится к вычислению повторных интегралов.

Пример 5. Изменить порядок интегрирования в интегралах

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,\ y)\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,\ y)\,dx.$$

□ В первом интеграле переменная y изменяется от 0 до 1, а x — от нуля до $\sqrt{y}$. Значит, область D_1 определяется неравенствами $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}$. Во втором интеграле y изменяется от 1 до $\sqrt{2}$, а x — от нуля до $\sqrt{2-y^2}$, т. е. область D_2: $1 \leqslant y \leqslant \sqrt{2}$, $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2-y^2}$. Таким образом, область интегрирования $D = D_1 \cup D_2$ ограничена снизу кривой $y = x^2$, сверху — кривой $y = \sqrt{2-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ (рис. 11.12). Согласно формуле (11.21),

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,\ y)\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,\ y)\,dx = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,\ y)\,dy.$$

Пример 6. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,\ y)\,dx.$$

□ Искомая область интегрирования D ограничена кривыми $x = -\sqrt{4-y^2}$ (левая полуокружность $x^2 + y^2 = 4$, $x \leqslant 0$), $x = -\sqrt{4y-y^2}$ (левая полуокружность $x^2 + (y-2)^2 = 4$, $x \leqslant 0$) и прямыми $y = 0$ и $y = 1$ (рис. 11.13).

Так как верхняя граница области D состоит из двух гладких дуг, то область D прямой $x = -\sqrt{3}$ следует разбить на две части. Тогда

$$I = \int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,\ y)\,dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,\ y)\,dy.$$

Изменение порядка интегрирования в двойном интеграле применяется при вычислении определенных интегралов от функций, первообразные которых не выражаются через элементарные функции.

Пример 7. Вычислить несобственный интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx,\ a > 0,\ b > 0.$$

□ Так как $\dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy}dy$, то исходный интеграл

$$I = \int_0^{\infty} dx \int_a^b e^{-xy}dy = \lim_{A\to\infty} \int_0^A dx \int_a^b e^{-xy}dy.$$

В полученном двойном интеграле изменим порядок интегрирования. Тогда

$$I = \lim_{A\to\infty} \int_a^b dy \int_0^A e^{-xy}dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^b \frac{1 - e^{-Ay}}{y}\, dy =$$

$$= \ln\frac{b}{a} - \lim_{A\to\infty} \int_a^b \frac{e^{-Ay}}{y}\, dy = \ln\frac{b}{a} - 0 = \ln\frac{b}{a}.$$

Тройной интеграл. Пусть функция $f(x, y, z)$ ограничена и непрерывна в замкнутой ограниченной области $V \subset \mathbf{R}^3$, граница Γ которой является кусочно-гладкой поверхностью. Разобьем область V с помощью конечного числа гладких поверхностей на частичные области (ячейки) V_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, объем каждой из которых равен Δv_i. В каждой ячейке V_i выберем произвольно точку (ξ_i, η_i, ζ_i) и построим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta v_i. \qquad (11.23)$$

Обозначим через Δ максимальный из диаметров областей V_i.

Если существует предел интегральных сумм (11.23) при $\Delta \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения области V на части V_i, ни от выбора точек $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in V_i$, то его называют *тройным интегралом от функции* $f(x, y, z)$ *по области* V и обозначают

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz \text{ или } \iiint_V f(x, y, z)\, dv. \qquad (11.25)$$

Функция $f(x, y, z)$ при этом называется *интегрируемой в области* V.

Таким образом, по определению,

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta v_i. \qquad (11.24)$$

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области V, то интеграл (11.24) существует.

Все установленные выше свойства двойных интегралов справедливы и для тройных интегралов. Перечислим их.

УЧЕБНАЯ БИБЛИОТЕКА

Пусть $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ — интегрируемые в области V функции. Тогда справедливы приведенные ниже свойства.

1°. $\iiint\limits_V 1 \cdot dxdydz = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_V dv = v$, где v — объем области V.

2°. Для любых α и $\beta \in \mathbf{R}$

$$\iiint\limits_V (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z))\, dv =$$

$$= \alpha \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv + \beta \iiint\limits_V g(x, y, z)\, dv.$$

3°. Если область V — объединение двух областей V_1 и V_2, не имеющих общих внутренних точек, то

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv = \iiint\limits_{V_1} f(x, y, z)\, dv + \iiint\limits_{V_2} f(x, y, z)\, dv. \quad (11.26)$$

4°. Если $f(x, y, z) \geqslant 0$, $\forall (x, y, z) \in V$, то $\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv \geqslant 0$.

5°. Если $f(x, y, z) \geqslant g(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in V$, то

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv \geqslant \iiint\limits_V g(x, y, z)\, dv.$$

6°. (Оценка модуля интеграла.) Справедливо неравенство

$$\left| \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv \right| \leqslant \iiint\limits_V |f(x, y, z)|\, dv.$$

7°. (Оценка интеграла.) Пусть $m = \inf\limits_{(x, y, z) \in V} f(x, y, z)$ и $M = \sup\limits_{(x, y, z) \in V} f(x, y, z)$.

Тогда

$$mv \leqslant \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv \leqslant Mv, \quad (11.27)$$

где v — объем области V.

Пример 8. Оценить интеграл $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$, если $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > R^2$.

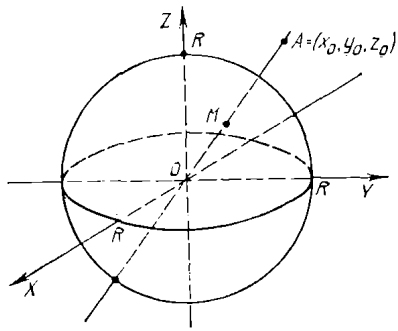


Рис. 11.14

□ Область интегрирования V есть шар $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ радиусом R с центром в начале координат (рис. 11.14). Поскольку $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > R^2$, то точка $A = (x_0, y_0, z_0)$ расположена вне данного шара. Функция $f(x, y, z) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ определяет расстояние от точки A до точки $M = (x, y, z)$ из области интегрирования. Эта функция принимает минимальное (максимальное) значение, если M — ближайшая к A (наиболее удаленная от A) точка сфе-

ры, лежащая на прямой, проходящей через центр шара и точку A. Так как радиус шара равен R, то

$$\min_V |f(x, y, z)| = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2} - R; \quad \max_V |f(x, y, z)| = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}+R,$$

где $\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$ — расстояние от точки A до центра шара.

Таким образом,

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2} - R \leqslant f(x, y, z) \leqslant \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2} + R, \ \forall (x, y, z) \in V.$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}+R} \leqslant \frac{1}{f(x, y, z)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}-R}.$$

На основании неравенства (11.27) получаем

$$\frac{4\pi R^3/3}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}+R} \leqslant \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{f(x, y, z)} \leqslant \frac{4\pi R^3/3}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}-R},$$

где $4\pi R^3/3$ — объем шара.

8°. Пусть V — параллелепипед: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, $p \leqslant z \leqslant q$. Если $f(x, y, z) = \varphi(x)\, g(y)\, h(z)$, то

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b \varphi(x)\, dx \int_c^d g(y)\, dy \int_p^q h(z)\, dz.$$

9°. (Теорема о среднем.) Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области V объемом v, то в V существует точка (ξ, η, ζ), такая, что

$$\frac{1}{v} \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv = f(\xi, \eta, \zeta). \tag{11.28}$$

Число $f(\xi, \eta, \zeta)$ называется *средним значением функции в области* V.

10°. *Производная тройного интеграла по области* V определяется следующим пределом:

$$\lim_{d \to 0} \frac{1}{v} \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv,$$

где d — диаметр области V; v — ее объем.

При этом справедливо равенство

$$\lim_{d \to 0} \frac{1}{v} \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv = f(x, y, z).$$

Сведение тройного интеграла к повторному. Вычисление тройных интегралов также сводится к последовательному вычислению однократных интегралов.

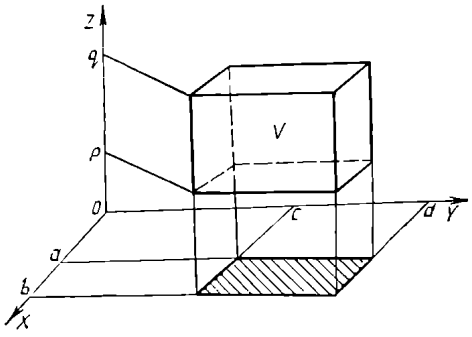


Рис. 11.15

1. Случай прямоугольной области. Пусть V — параллелепипед: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, $p \leqslant z \leqslant q$ (рис. 11.15), а $f(x, y, z)$ — непрерывная в области V функция. Вычисление тройного интеграла сводится к вычислению повторных интегралов, т. е. приводится к последовательному вычислению одномерных интегралов по формуле

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int_c^d dy \int_a^b dx \int_p^q f(x, y, z)\,dz = \int_p^q dz \int_c^d dy \int_a^b f(x, y, z)\,dx. \qquad (11.29)$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\iiint_V 8y^2ze^{-xyz}\,dxdydz = I$, где V — область, ограниченная плоскостями $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 0$, $z=0$, $z = 2$.

□ Имеем

$$I = 8\int_{-1}^{0} dy \int_0^2 dz \int_0^2 y^2ze^{-xyz}dx = 8\int_{-1}^{0} dy \int_0^2 \frac{y^2ze^{-xyz}}{-yz}\Bigg|_{x=0}^{x=2} dz =$$

$$= 8\int_{-1}^{0} dy \int_0^2 (y - ye^{-2yz})\,dz = 8\int_{-1}^{0} \left(yz + \frac{1}{2}e^{-2yz}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=2} dy =$$

$$= 8\int_{-1}^{0} \left(2y + \frac{1}{2}e^{-4y} - \frac{1}{2}\right)dy = 8\left(y^2 - \frac{1}{8}e^{-4y} - \frac{1}{2}y\right)\Bigg|_{-1}^{0} = e^4 - 13.$$

2. Случай криволинейной области. Пусть область V задана неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$, $g_1(x, y) \leqslant z \leqslant g_2(x, y)$ (рис. 11.16). Имеет место формула вычисления тройного интеграла

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (11.30)$$

Часто равенство (11.30) записывается в виде

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dv = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz\right)dy\right)dx. \qquad (11.31)$$

Это означает, что вначале функция $f(x, y, z)$ интегрируется по z

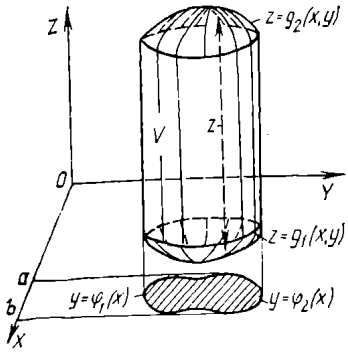


Рис. 11.16

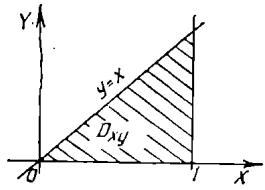


Рис. 11.17

при фиксированных x и y, затем результат интегрируется по y при фиксированном x и, наконец, интегрирование производится по x в постоянных пределах от a до b.

Пример 10. Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_V \left(5x + \frac{3}{2}\,z\right) dv$, где $V: y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = 0$, $z = x^2 + 15y^2$.

□ Вдоль оси Z снизу тело V ограничено плоскостью $z = 0$, а сверху — эллиптическим параболоидом $z = x^2 + 15y^2$. Проекцией тела V на плоскость XY является область $D_{xy}: y = x$, $y = 0$, $x = 1$ (рис. 11.17). Тогда в соответствии с формулой (11.30) получаем

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{x^2+15y^2} \left(5x + \frac{3}{2}\,z\right) dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \left(5xz + \frac{3}{4}\,z^2\right)\Big|_{z=0}^{z=x^2+15y^2} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \left(5x^3 + 75xy^2 + \frac{3}{4}\,x^4 + \frac{45}{2}\,x^2y^2 + \frac{675}{4}\,y^4\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(5x^3y + 25xy^3 + \frac{3}{4}\,x^4y + \frac{15}{2}\,x^2y^3 + \frac{135}{4}\,y^5\right)\Big|_{y=0}^{y=x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (30x^4 + 42x^5)\,dx = 13.$$

Понятие n-кратного интеграла. Назовем n-мерным параллелепипедом V_n в пространстве $\mathbf{R}^n$ множество точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих соотношениям

$$V_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2,\ \ldots,\ a_n \leqslant x_n \leqslant b_n\}, \tag{11.32}$$

где $a_i,\ b_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Объем n-мерного параллелепипеда определяется равенством

$$v = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i). \tag{11.33}$$

Ясно, что по формуле (11.33) при $n = 2$ и $n = 3$ определяют площадь прямоугольника в $\mathbf{R}^2$ и объем параллелепипеда в $\mathbf{R}^3$ соответственно.

Пусть теперь V — ограниченная замкнутая область в пространстве $\mathbf{R}^n$ и $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывная в этой области функция. Гиперплоскостями $x_i = \text{const}$ разбиваем область V на n-мерные параллелепипеды, объемы которых равны $\Delta x_{1j}\Delta x_{2k}\ldots\Delta x_{nl}$, где

$$\Delta x_{1j} = x_{1j} - x_{1\,j-1},\ \Delta x_{2k} = x_{2k} - x_{2\,k-1},\ \ldots,\ \Delta x_{nl} =$$
$$= x_{nl} - x_{n\,l-1},\ j = 1, 2, \ldots, N_j;\ k = 1, 2, \ldots, N_k;\ \ldots;\ l = 1, 2, \ldots, N_l;$$

$N_j, N_k, \ldots, N_l$ — натуральные числа.

В каждом таком параллелепипеде возьмем произвольную точку $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ и составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^{N_j}\sum_{k=1}^{N_k}\ \ldots\ \sum_{l=1}^{N_l} f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)\,\Delta x_{1j}\Delta x_{2k}\cdots\Delta x_{nl}.$$

Предел этих интегральных сумм при $\max\Delta x_{1j} \to 0$, $\max\Delta x_{2k} \to 0$, ..., $\max\Delta x_{nl} \to 0$ называется *n-кратным интегралом от функции f по области V* и обозначается

$$\underbrace{\int\int\cdots\int}_{V} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1dx_2\cdots dx_n. \qquad (11.34)$$

Если обозначить $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $d\mathbf{x} = dx_1dx_2\cdots dx_n$, то соотношение (11.34) записывается в виде $\int\limits_V f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$.

Для n-кратных интегралов справедливы все свойства двойных и тройных интегралов.

Интеграл от функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по n-мерному параллелепипеду получается путем последовательного интегрирования функции f по каждой из переменных x_i от a_i до b_i в любом порядке. Например,

$$\int\int\cdots\int_{\substack{a_1\leqslant x_1\leqslant b_1\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_n\leqslant x_n\leqslant b_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1dx_2\cdots dx_n =$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_n.$$

Для криволинейной области n-кратный интеграл вычисляется по формулам, аналогичным (11.21) и (11.30).

Пример 11. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V\int xdxdydzdt = I$, где область V определена неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x \leqslant y \leqslant 2$, $3 \leqslant z \leqslant t^2$, $3 \leqslant t \leqslant 6$.

□ Имеем

$$I = \int_0^1 dx \int_x^2 dy \int_3^6 dt \int_3^{t^2} xdz = \int_0^1 dx \int_x^2 dy \int_3^6 xz\Big|_{z=3}^{z=t^2} dt =$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^2 dy \int_3^6 (xt^2 - 3x)\, dt = \int_0^1 dx \int_x^2 \left(\frac{xt^3}{3} - 3xt\right)\Big|_{t=3}^{t=6} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^2 54x\, dy = 54 \int_0^1 xy \Big|_{y=x}^{y=2} dx = \int_0^1 54\,(2x - x^2)\, dx = 36.$$

11.2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

Геометрический смысл якобиана. Пусть в декартовой системе координат XY задана область D, а в декартовой системе координат UV — область W (рис. 11.18). Предположим, что существует гладкая функция $\mathbf{g}$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, которая взаимно однозначно отображает область W на область D, т. е. имеют место равенства $\mathbf{g}(W) = D$, $\mathbf{g}^{-1}(D) = W$, где $\mathbf{g}^{-1}$ — обратная для $\mathbf{g}$ функция. Выясним, как изменяется площадь при отображении $\mathbf{g}$.

Пусть P_2 — прямоугольник в плоскости UV с вершинами $A_0 = (u, v)$, $A_1 = (u + du, v)$, $A_2 = (u, v + dv)$ (рис. 11.19). Этот прямоугольник построен на векторах $\overrightarrow{A_0A_1} = (du, 0) = du\mathbf{i}$ и $\overrightarrow{A_0A_2} = (0, dv) = dv\mathbf{j}$, где du и dv — длины соответствующих сторон прямоугольника. Площадь этого прямоугольника $S_{P_2} = dudv$.

Пусть

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{pmatrix} \tag{11.35}$$

есть непрерывно дифференцируемая функция с якобианом $\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| \neq 0$, $\forall (u, v) \in P_2$, отображающая прямоугольник P_2 в «криволинейный параллелограмм» Π_2 на плоскости XY (рис. 11.20). Вершины A_i прямоугольника P_2 преобразуются в вершины $\mathbf{g}(A_i)$, $i = 0, 1, 2$. Соответствующими границами параллелограмма Π_2 яв-

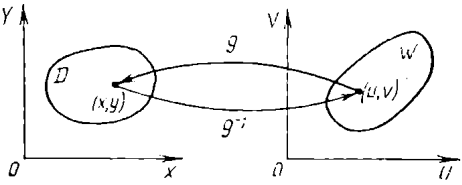


Рис. 11.18

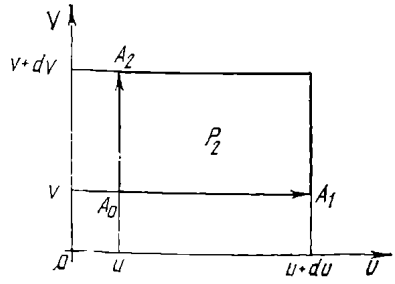


Рис. 11.19

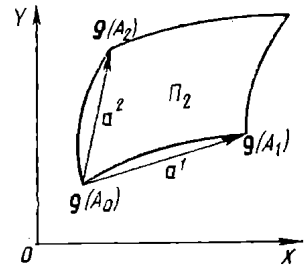


Рис. 11.20

ляются кривые линии — образы отрезков A_0A_1 и A_0A_2 при отображении (11.35). Криволинейный параллелограмм Π_2 заменим параллелограммом, построенным на векторах $\mathbf{a}^1 = \mathbf{g}(A_0)\,\mathbf{g}(A_1)$ и $\mathbf{a}^2 = \mathbf{g}(A_0)\,\mathbf{g}(A_2)$. Так как

$$\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} x(u+du,\ v) - x(u,\ v) \\ y(u+du,\ v) - x(u,\ v) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}\,du \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\,du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} du; \qquad (11.36)$$

$$\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} x(u,\ v+dv) - x(u,\ v) \\ y(u,\ v+dv) - y(u,\ v) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v}\,dv \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}\,dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} dv, \qquad (11.37)$$

а площадь S_{Π_2} параллелограмма Π_2 равна модулю векторного произведения $[\mathbf{a}^1,\ \mathbf{a}^2]$, то

$$S_{\Pi_2} = |[\mathbf{a}^1,\ \mathbf{a}^2]| = |\mathbf{a}^1|\,|\mathbf{a}^2|\,|\sin(\widehat{\mathbf{a}^1,\ \mathbf{a}^2})|. \qquad (11.38)$$

С учетом скалярного произведения $(\mathbf{a}^1,\ \mathbf{a}^2) = |\mathbf{a}^1|\,|\mathbf{a}^2|\cos(\widehat{\mathbf{a}^1,\ \mathbf{a}^2})$ из формулы (11.38) получаем

$$S^2_{\Pi_2} = |\mathbf{a}^1|^2\,|\mathbf{a}^2|^2 \sin^2(\widehat{\mathbf{a}^1,\ \mathbf{a}^2}) + |\mathbf{a}^1|^2\,|\mathbf{a}^2|^2 \cos^2(\widehat{\mathbf{a}^1,\ \mathbf{a}^2}) - (\mathbf{a}^1,\ \mathbf{a}^2)^2 =$$

$$= |\mathbf{a}^1|^2\,|\mathbf{a}^2|^2 - (\mathbf{a}^1,\ \mathbf{a}^2)^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}^1,\ \mathbf{a}^1) & (\mathbf{a}^1,\ \mathbf{a}^2) \\ (\mathbf{a}^2,\ \mathbf{a}^1) & (\mathbf{a}^2,\ \mathbf{a}^2) \end{vmatrix}. \qquad (11.39)$$

Из соотношений (11.36), (11.37) и (11.39) имеем

$$S^2_{\Pi_2} = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 & \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial v} & \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix} (dudv)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 (dudv)^2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2 du^2dv^2,$$

т. е.

$$S_{\Pi_2} = \left|\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\right| dudv = \left|\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\right| S_{P_2}. \qquad (11.40)$$

Отсюда

$$\lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \frac{S_{\Pi_2}}{S_{P_2}} = \lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \frac{\mathbf{g}(S_{P_2})}{S_{P_2}} = \left|\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right|,$$

т. е. *модуль якобиана численно равен отношению бесконечно малых площадей, отвечающих друг другу при отображении* $\mathbf{g}$ в точке (u, v).

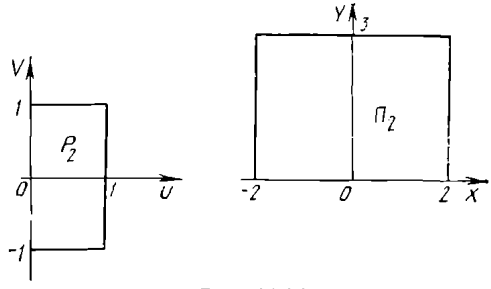


Рис. 11.21

Пример 1. Пусть $P_2 = \{0 \leqslant u \leqslant 1, -1 \leqslant v \leqslant 1\}$. Отображение $x = -2v$, $y = 3u$ переводит прямоугольник P_2 в прямоугольник $\Pi_2 = \{-2 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 3\}$ на плоскости XY (рис. 11.21). Нетрудно видеть, что $S_{P_2} = 2$, $S_{\Pi_2} = 12$ и $\left|\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| = 1\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 = \dfrac{S_{\Pi_2}}{S_{P_2}}$.

Замена переменных в двойных интегралах. Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция, определенная в замкнутой ограниченной области D с кусочно-гладкой границей Г. Пусть, далее, область D отображается взаимно однозначно на область W плоскости UV с помощью преобразования (11.35) так, что $\mathbf{g}(W) = D$, а $\mathbf{g}^{-1}(D) = W$. Если отображение $\mathbf{g}$ определяется равенствами $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $(u, v) \in W$, то обратное отображение имеет вид

$$\mathbf{g}^{-1} = \mathbf{g}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u = u(x, y); \\ v = v(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in D, \tag{11.41}$$

где $u(x, y)$, $v(x, y)$ — непрерывно дифференцируемые функции на D.

Наша задача — преобразовать интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$ в интеграл по новым переменным $(u, v) \in W$. Область W разбиваем прямыми $u = u_i = \text{const}$ и $v = v_j = \text{const}$ на прямоугольники P_{ij}, площади которых равны $S_{P_{ij}}$. Тогда семейства кривых $u(x, y) = u_i$ и $v(x, y) = v_j$ разобьют область D на соответствующие криволинейные параллелограммы Π_{ij} с площадями $S_{\Pi_{ij}}$ (рис. 11.22 и 11.23). При этом точке $(u_i, v_j) \in W$ соответствует точка $(x_i, y_j) = (x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) \in D$. Отсюда с учетом равенства (11.40) получаем

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\, S_{\Pi_{ij}} =$$

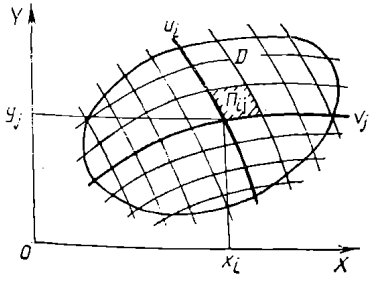


Рис. 11.22

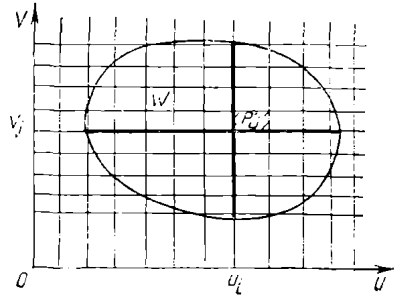


Рис. 11.23

$$= \lim_{\substack{\max \Delta u_i \to 0 \\ \max \Delta v_j \to 0}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right|_{\substack{u=u_i \\ v=v_j}} S_{P_{ij}} =$$

$$= \iint_W f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv.$$

Таким образом, если функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ осуществляют взаимно однозначное отображение области W плоскости UV на область D плоскости XY, то справедливо равенство

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_W f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv, \qquad (11.42)$$

которое называется *формулой замены переменной в двойном интеграле.*

Криволинейные координаты. При отображении функцией $\mathbf{g}$ прямой $u = u_i$ в области D отвечает гладкая кривая $x = x(u_i, v)$, $y = y(u_i, v)$ параметра v. Точно так же прямой $v = v_j$ в области D отвечает кривая $x = x(u, v_j)$, $y = y(u, v_j)$ параметра u. Эти кривые — образы прямых из области W, параллельных координатным осям U и V, — называются *координатными линиями* u и v в области D. Пересечение координатных линий в области D определяет единственную точку (x_i, y_j), что следует из взаимной однозначности отображения $\mathbf{g}$. Так как координатные линии — кривые, то величины u и v называются *криволинейными координатами* точек области D.

Таким образом, с одной стороны, u и v — декартовы координаты точек области W, а с другой — криволинейные координаты точек области D.

Полярная система координат. Наиболее распространенная система криволинейных координат на плоскости — это полярные координаты ρ и φ. Они связаны с декартовыми координатами x и y равенствами $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, где $\rho \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ (или $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$). Координатными линиями для полярных координат служат концентрические окружности $\rho = \text{const}$ с центром в начале координат и лучи $\varphi = \text{const}$, выходящие из этого центра.

Полагая $u = \rho$, $v = \varphi$, имеем

$$\left| \frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Тогда в соответствии с формулой (11.42) двойной интеграл при переходе к полярной системе координат преобразуется следующим образом:

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_W f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)\, \rho d\rho d\varphi. \qquad (11.43)$$

Площадь области D, согласно равенству (11.7), в полярных координатах определяется формулой

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_W \rho d\rho d\varphi. \qquad (11.44)$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x^2 - 6x + y^2 = 0$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}\,x$.

□ Выделив полные квадраты, получим

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4;$$

$$x^2 - 6x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 9.$$

Это окружности с центрами в точках (2, 0) и (3, 0) и радиусами 2 и 3 соответственно (рис. 11.24).

Перейдем к полярным координатам по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ и найдем область изменения параметров ρ и φ. Из уравнений окружностей имеем:

$$(x^2 + y^2 = 4x) \Rightarrow (\rho = 4\cos\varphi);$$

$$(x^2 + y^2 = 6x) \Rightarrow (\rho = 6\cos\varphi).$$

Из уравнений прямых $y = x/\sqrt{3}$ и $y = \sqrt{3}\,x$ получаем соответственно:

$$(\rho\sin\varphi = \rho\cos\varphi/\sqrt{3}) \Rightarrow (\operatorname{tg}\varphi = 1/\sqrt{3}) \Rightarrow (\varphi = \pi/6);$$

$$(\rho\sin\varphi = \sqrt{3}\,\rho\cos\varphi) \Rightarrow (\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}) \Rightarrow (\varphi = \pi/3).$$

Таким образом, $W = \{4\cos\varphi \leqslant \rho \leqslant 6\cos\varphi,\ \pi/6 \leqslant \varphi \leqslant \pi/3\}$ и по формуле (11.44)

$$S = \iint\limits_W \rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{6\cos\varphi} \rho d\rho = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{\rho=4\cos\varphi}^{\rho=6\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= 10\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2\varphi d\varphi = 5\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} (1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi = \frac{5}{6}\pi.$$

Пример 3. Найти массу пластинки D: $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, если поверхностная плотность $\mu = (y - 4x)/(x^2 + y^2)$.

□ Согласно равенству (11.3), масса пластинки

$$m = \iint\limits_D \mu(x, y)\, dxdy = \iint\limits_D \frac{y - 4x}{x^2 + y^2}\, dxdy$$

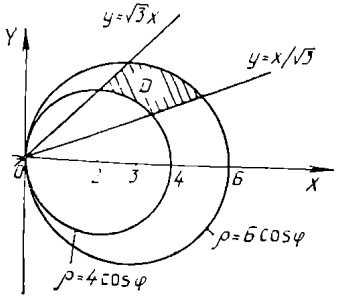


Рис. 11.24

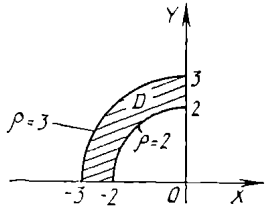


Рис. 11.25

(область D изображена на рис. 11.25). Перейдя к полярным координатам, получим:

$$(x^2+y^2=4) \Rightarrow (\rho=2);\ (x^2+y^2=9) \Rightarrow (\rho=3);\ \pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Таким образом,

$$m=\iint\limits_D \frac{y-4x}{x^2+y^2}\,dxdy=\iint\limits_W \frac{\rho\sin\varphi-4\rho\cos\varphi}{\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(\sin\varphi-4\cos\varphi)\,d\varphi\int\limits_2^3 d\rho=5.$$

Пример 4. Вычислить площадь замкнутой фигуры, ограниченной кривой

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2),\ a>0. \tag{11.45}$$

□ Перейдя к полярным координатам, из уравнения кривой получим

$$(\rho^4=2a^2\rho^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)) \Rightarrow (\rho=a\sqrt{2\cos 2\varphi}).$$

Из уравнения (11.45) видно, что фигура, ограниченная кривой, симметрична относительно координатных осей и начала координат. Поэтому достаточно вычислить площадь части фигуры, расположенной в первой координатной четверти, где $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$, $0 \leqslant \rho \leqslant a\sqrt{2\cos 2\varphi}$, и результат умножить на 4. Имеем

$$S=4\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho d\rho = 2\int\limits_0^{\pi/4} \rho^2 \Big|_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} d\varphi = 4a^2\int\limits_0^{\pi/4}\cos 2\varphi\cdot d\varphi = 2a^2.$$

Обобщенная полярная система координат. *Обобщенные полярные координаты* ρ и φ вводятся по формулам:

$$x/a=\rho\cos\varphi;\ y/b=\rho\sin\varphi,\ \rho\geqslant 0;\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

Нетрудно видеть, что для эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ радиальная координата $\rho=1$. Поэтому обобщенные полярные координаты отображают эллипс с полуосями a и b на прямоугольник $0\leqslant\rho\leqslant 1$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

Для обобщенных полярных координат якобиан $\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}\right|=ab\rho$. Следовательно, формула замены переменных в обобщенных полярных координатах для двойных интегралов имеет вид

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=ab\iint\limits_W f(a\rho\cos\varphi,\ a\rho\sin\varphi)\,\rho d\rho d\varphi. \tag{11.46}$$

Пример 5. Найти массу пластинки D, заданной неравенствами $1\leqslant x^2/4+y^2/9\leqslant 36$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 3x/2$, и имеющей поверхностную плотность $\mu=9x/y^3$.

□ Положим $x=2\rho\cos\varphi$, $y=3\rho\sin\varphi$. Тогда $\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}\right|=6\rho$. Из неравенств $1\leqslant x^2/4+y^2/9\leqslant 36$ будем иметь $1\leqslant\rho^2\leqslant 36$, т. е. $1\leqslant\rho\leqslant 6$. Далее, из неравенства $x\geqslant 0$ получим $(2\rho\cos\varphi\geqslant 0)\Rightarrow(-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$, а из неравенства $y\geqslant 3x/2$ выводим $(\operatorname{tg}\varphi\geqslant 1)\Rightarrow(\pi/4\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)\cup(5\pi/4\leqslant\varphi\leqslant 3\pi/2)$. Следовательно, $\pi/4\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$. В таком случае

$$m = \iint\limits_D \frac{9x}{y^3}\,dxdy = 4\iint\limits_W \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\,\frac{1}{\rho}\,d\rho d\varphi = 4\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sin^3\varphi}\int\limits_1 \frac{d\rho}{\rho} =$$

$$= -\frac{2}{\sin^2\varphi}\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\rho\Big|_1^6 = 2\ln 6.$$

Замена переменных в тройных интегралах. Пусть V — область с кусочно-гладкой границей в пространстве $\mathbf{R}^3$ переменных x, y, z, а Ω — область в пространстве $\mathbf{R}^3$ переменных u, v, w. Пусть, далее, непрерывно дифференцируемая функция

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(u, v, w) = \begin{pmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(u, v, w); \\ y = y(u, v, w); \\ z = z(u, v, w), \ (u, v, w) \in \Omega \end{cases} \tag{11.47}$$

с якобианом

$$\left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, \ \forall (u, v, w) \in \Omega \tag{11.48}$$

взаимно однозначно отображает область Ω на область V. Тогда $\mathbf{g}(\Omega) = V$, $\mathbf{g}^{-1}(V) = \Omega$, где $\mathbf{g}^{-1}$ — обратная для $\mathbf{g}$ функция, имеющая вид

$$\mathbf{g}^{-1} = \mathbf{g}^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u = u(x, y, z); \\ v = v(x, y, z); \\ w = w(x, y, z), \ (x, y, z) \in V. \end{cases} \tag{11.49}$$

Пусть в области V задана непрерывная функция $f(x, y, z)$. Тогда, рассуждая так же, как и при выводе формулы замены переменных в двойном интегале, получим следующую формулу замены переменных в тройном интеграле:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_\Omega f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| dudvdw. \tag{11.50}$$

В частности, для вычисления объема тела V применяется формула

$$v = \iiint\limits_D dxdydz = \iiint\limits_\Omega \left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| dudvdw. \tag{11.51}$$

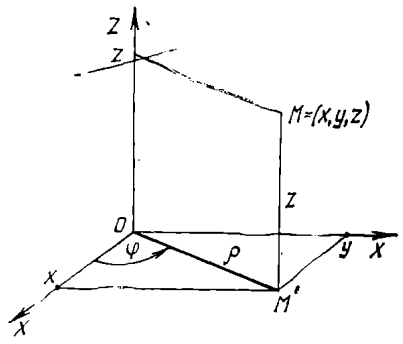


Рис. 11.26

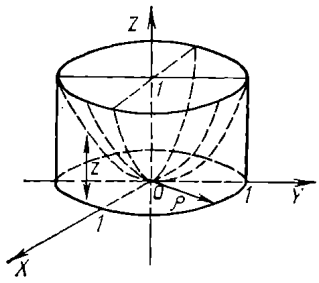


Рис. 11.27

Поверхности $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ и $w = \text{const}$ называют *криволинейными координатными поверхностями в области* V. Их пересечение определяет в этой области единственную точку. Поэтому u, v, w называют *криволинейными координатами точки в области* V.

Цилиндрическая система координат. В этой системе положение произвольной точки $M = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ однозначно определяется тройкой чисел (ρ, φ, z), где z — аппликата точки M, а (ρ, φ) — полярные координаты точки $M' = (x, y)$, являющейся проекцией точки M на плоскость XY (рис. 11.26). Если полярная ось совпадает с положительным направлением оси X, то формулы

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\ 0 \leqslant \rho \leqslant +\infty;\ |z| < \infty, \\ z = z; \end{cases} \qquad (11.52)$$

устанавливают связь между декартовыми и цилиндрическими координатами точки M.

В цилиндрической системе координат координатными поверхностями служат: цилиндры $\rho = \text{const}$, полуплоскости $\varphi = \text{const}$, проходящие через ось Z, и плоскости $z = \text{const}$, параллельные плоскости XY.

Найдем якобиан отображения (11.52):

$$\left|\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

С учетом равенства (11.50) формула замены переменных в цилиндрической системе координат приобретает вид

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho d\rho d\varphi dz. \qquad (11.53)$$

В частности, объем тела V можно определять по формуле

$$v = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_\Omega \rho d\rho d\varphi dz. \qquad (11.54)$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V x^2y^2dxdydz$, где V — область, определяемая неравенствами $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2$.

□ Область V (рис. 11.27) ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = 1$, плоскостью $z = 0$ и параболоидом $z = x^2 + y^2$. Перейдя к цилиндрическим координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, из неравенств $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2$ получим $\rho \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant \rho^2$. Отсюда область $\Omega = \{0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant \rho^2\}$. Применив формулу (11.53), находим

$$\iiint\limits_V x^2y^2dxdydz = \iiint\limits_\Omega \rho^2\cos^2\varphi\rho^2\sin^2\varphi\rho d\rho d\varphi\, dz =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \int\limits_0^1 \rho^5 d\rho \int\limits_0^{\rho^2} dz = \frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi)\, d\varphi \int\limits_0^1 \rho^7 d\rho = \frac{\pi}{32}.$$

Пример 7. Найти объем тела V, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 10x$, $x^2 + y^2 = 13x$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $y \geqslant 0$.

□ В цилиндрических координатах уравнения поверхностей, ограничивающих тело V, приобретают вид $\rho^2 = 10\rho\cos\varphi$, $\rho^2 = 13\rho\cos\varphi$, $z = \rho$, $z = 0$, $\rho\sin\varphi \geqslant 0$ соответственно. Отсюда $\rho = 10\cos\varphi$, $\rho = 13\cos\varphi$, $z = \rho$, $z = 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Так как $\rho \geqslant 0$, то из неравенств $\cos\varphi \geqslant 0 \Rightarrow |\varphi| \leqslant \pi/2$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ имеем $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Таким образом, область $\Omega = \{0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2,\ 10\cos\varphi \leqslant \rho \leqslant 13\cos\varphi,\ 0 \leqslant z \leqslant \rho\}$.

Искомый объем найдем по формуле (11.54):

$$v = \iiint\limits_\Omega \rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{10\cos\varphi}^{13\cos\varphi} \rho d\rho \int\limits_0^{\rho} dz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{10\cos\varphi}^{13\cos\varphi} \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \rho^3 \Big|_{10\cos\varphi}^{13\cos\varphi} d\varphi = 399\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\varphi d\varphi = 399\int\limits_2^{\pi/2} (1 - \sin^2\varphi)\, d\sin\varphi =$$

$$= 399\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} = 266.$$

Пример 8. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$, $12z = x^2 + y^2$.

□ Уравнение $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$ определяет верхнюю половину сферы ($z \geqslant 0$) с центром в начале координат и радиусом 8, а равенство $12z = x^2 + y^2$ есть уравнение параболоида (рис. 11.28).

В цилиндрических координатах уравнения поверхностей приобретают вид $z = \sqrt{64 - \rho^2}$, $12z = \rho^2$. Решив полученную систему, найдем $z = 4$, $\rho = 4\sqrt{3}$, т. е. параболоид и полусфера пересекаются в плоскости $z = 4$ по окружности радиусом $4\sqrt{3}$. Таким образом, $\Omega = \left\{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \rho \leqslant 4\sqrt{3},\ \frac{\rho^2}{12} \leqslant z \leqslant \sqrt{64 - \rho^2}\right\}$. Следовательно,

$$v = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{4\sqrt{3}} \rho d\rho \int\limits_{\rho^2/12}^{\sqrt{64-\rho^2}} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{4\sqrt{3}} (\rho\sqrt{64 - \rho^2} - \rho^3/12)\, d\rho =$$

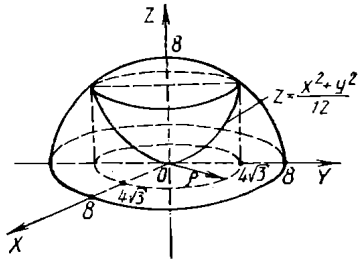


Рис. 11.28

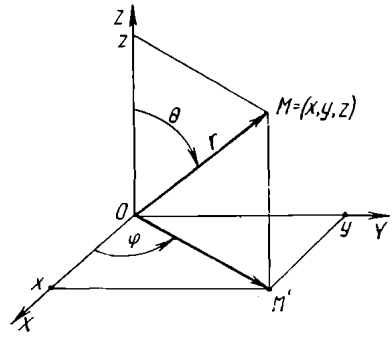


Рис. 11.29

$$= 2\pi\left(-\frac{\sqrt{(64-\rho^2)^3}}{3}-\frac{\rho^4}{48}\right)\Big|_0^{4\sqrt{3}} = \frac{608\pi}{3}.$$

Пример 9. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями $z = 4 - 14((x+1)^2 + y^2)$, $z = -28x - 24$.

□ Решив совместно уравнения, найдем проекцию линии пересечения ограничивающих тело поверхностей: $(4 - 14((x+1)^2 + y^2) = -28x - 24) \Rightarrow (x^2 + y^2 = 1)$. Отсюда следует, что $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Подставив $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ и $z = z$ в уравнения ограничивающих тело поверхностей, будем иметь $z = 4 - 14(\rho^2 + 2\rho\cos\varphi + 1)$, $z = -28\rho\cos\varphi - 24$. Таким образом,

$$\Omega = \{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ -28\rho\cos\varphi - 24 \leqslant z \leqslant 4 - 14(\rho^2 + 2\rho\cos\varphi + 1)\}.$$

Следовательно,

$$v = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\, d\rho \int_{-28\rho\cos\varphi-24}^{4-14(\rho^2+2\rho\cos\varphi+1)} dz = 14\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho - \rho^3)\, d\rho =$$

$$= 14 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = 7\pi.$$

Сферическая система координат. Пусть XYZ — декартова прямоугольная система координат в пространстве $\mathbf{R}^3$ и $M = (x, y, z)$ — произвольная точка из $\mathbf{R}^3$. Обозначим через r расстояние от начала координат до точки M ($r \geqslant 0$), а через θ — угол между осью Z и вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый от оси Z ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$). Пусть M' — проекция точки M на плоскость XY, а φ — угол между осью Y вектором $\overrightarrow{OM'}$, отсчитываемый от оси X (рис. 11.29). Тогда декартовы координаты x, y, z точки M выражаются через r, θ и φ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &x = r\sin\theta\cos\varphi;\\ &y = r\sin\theta\sin\varphi,\ 0 \leqslant r < +\infty,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi;\\ &z = r\cos\theta. \end{aligned}\right\} \quad (11.$$

Заметим, что $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Числа r, θ и φ называются *сферическими координатами* точки M, а система уравнений (11.55) преобразует сферические координаты точки в пространстве в декартовы.

Криволинейными координатными поверхностями в сферической системе координат являются сферы $r = \text{const}$, полуплоскости $\varphi = \text{const}$ и конусы $\theta = \text{const}$. Их пересечение определяет единственную точку в $\mathbf{R}^3$.

Определим якобиан преобразования (11.55):

$$\left|\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(r,\ \theta,\ \varphi)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Преобразование тройного интеграла от прямоугольных декартовых координат к сферическим ксординатам производится по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_\Omega f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\,r^2\sin\theta drd\theta d\varphi. \qquad (11.56)$$

Объем тела V определяем по формуле

$$v = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_\Omega r^2\sin\theta drd\theta d\varphi. \qquad (11.57)$$

Пример 10. Вычислить $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)^3\,dxdydz$, где V — область, определяемая неравенствами $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x^2+y^2+z^2 \leqslant 10$.

□ Область V представляет собой часть шара радиусом $\sqrt{10}$, расположенную в первом октанте (рис. 11.30). Тогда

$$\Omega = \{0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2,\ \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ \ 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{10}\}.$$

По формуле (11.56)

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)^3\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega r^8\sin\theta drd\theta d\varphi =$$

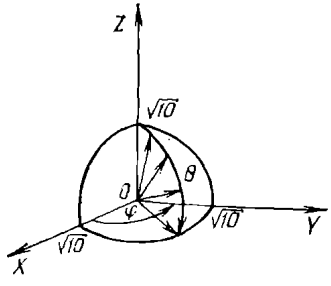


Рис. 11.30

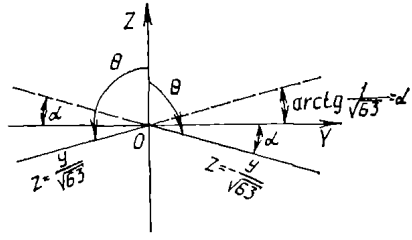


Рис. 11.31

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{10}} r^8 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = \frac{5000\sqrt{10}}{9}\pi.$$

Пример 11. Вычислить объем тела

$$V = \left\{64 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 144,\ z > -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{63}},\ 0 \leqslant y \leqslant x/\sqrt{3}\right\}.$$

□ Перейдем к сферическим координатам (11.55). Тогда из неравенств $64 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 144$ получаем $64 \leqslant r^2 \leqslant 144$, т. е. $8 \leqslant r \leqslant 12$.

Для определения области изменения угла θ поступим следующим образом. В сечении поверхности $z = -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{63}}$ плоскостью $x = 0$ (или $y = 0$) получим прямые $z = \pm y/\sqrt{63}$ (или $z = \pm x/\sqrt{63}$) (рис. 11.31). Заметим, что искомый угол θ изменяется в пределах от 0 до $\pi/2 + \operatorname{arctg}(1/\sqrt{63})$.

Наконец, из неравенств $0 \leqslant y \leqslant x/\sqrt{3}$ будем иметь

$$\left(0 \leqslant r\sin\theta\sin\varphi \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} r\sin\theta\cos\varphi\right) \Rightarrow \left(0 \leqslant \sin\varphi \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\varphi\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(0 \leqslant \operatorname{tg}\varphi \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6}\right).$$

Таким образом, область Ω определяется соотношениями

$$\{0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/6,\ 8 \leqslant r \leqslant 12,\ 0 \leqslant \theta < \pi/2 + \operatorname{arctg}(1/\sqrt{63})\}.$$

По формуле (11.57) находим искомый объем:

$$v = \iiint_\Omega r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \int_0^{\pi/6} d\varphi \int_8^{12} r^2 dr \int_0^{\pi/2+\operatorname{arctg}(1/\sqrt{63})} \sin\theta d\theta =$$

$$= -\frac{\pi}{6}\frac{r^3}{3}\Big|_8^{12} \cos\theta\Big|_0^{\pi/2+\operatorname{arctg}(1/\sqrt{63})} = \frac{608}{9}\pi\left(1 - \cos\left(\pi/2 + \operatorname{arctg}(1/\sqrt{63})\right)\right) =$$

$$= \frac{608}{9}\pi\left(1 + \sin\operatorname{arctg}(1/\sqrt{63})\right) = \frac{608}{9}\pi\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\operatorname{arctg}(1/\sqrt{63})}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{arctg}(1/\sqrt{63})}}\right) =$$

$$= \frac{608}{9}\pi\left(1 + \frac{1}{8}\right) = 76\pi.$$

Замена переменных в n-кратных интегралах. Теперь уже несложно сформулировать правило замены переменных в n-кратных интегралах. Пусть взаимно однозначное преобразование

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{pmatrix} x_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ x_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \ldots, u_n); \\ x_2 = x_2(u_1, \ldots, u_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_n(u_1, \ldots, u_n) \end{cases}$$

отображает область Ω_n пространства $\mathbf{R}^n$ переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$ на область V_n пространства $\mathbf{R}^n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и якобиан

$$\left|\frac{D(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}{D(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{du_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \neq 0,\ \forall\,(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n) \in \Omega_n.$$

Тогда n-кратный интеграл преобразуется по формуле

$$\iint\limits_{V_n} \cdots \int f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\,dx_1dx_2 \cdots dx_n =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_n} \cdots \int f\left(x_1(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n),\ \ldots,\ x_n(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)\right) \left|\frac{D(x_1,\ \ldots,\ x_n)}{D(u_1,\ \ldots,\ u_n)}\right| \times$$

$$\times\, du_1du_2 \ldots du_n, \tag{11.58}$$

где $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ — непрерывная в области V_n функция.

Пример 12. Вычислить объем n-мерного единичного шара $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1$.

□ Перейдем к новым переменным $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$ с помощью формул

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \cos u_1; \\ x_2 &= \sin u_1 \cos u_2; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \sin u_1 \sin u_2 \cdots \sin u_{n-1} \cos u_n. \end{aligned}\right\} \tag{11.59}$$

Соотношения (11.59) устанавливают взаимно однозначное соответствие между областями $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} x_1^2 \leqslant 1\right\}$ и $\{0 \leqslant u_i \leqslant \pi,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Якобиан преобразования (11.59) представляет собой определитель нижней треугольной матрицы с главной диагональю вида

$$\begin{aligned} &-\sin u_1 \\ &-\sin u_1 \sin u_2 \\ &-\sin u_1 \sin u_2 \sin u_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &-\sin u_1 \sin u_2 \sin u_3 \cdots \sin u_n. \end{aligned}$$

Следовательно, якобиан преобразования (11.59)

$$\left|\frac{D(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}{D(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)}\right| = (-1)^n \sin^n u_1 \sin^{n-1} u_2 \cdots \sin^2 u_{n-1} \sin u_n.$$

Из формулы (11.58) получаем ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$)

$$\iint\limits_{x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1} \cdots \int dx_1dx_2 \cdots dx_n =$$

$$= \iint\limits_{0 \leqslant u_i \leqslant \pi} \cdots \int \sin^n u_1 \sin^{n-1} u_2 \cdots \sin^2 u_{n-1} \sin u_n\, du_1du_2 \cdots du_n =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \sin^n u_1 du_1 \int\limits_0^{\pi} \sin^{n-1} u_2 du_2 \cdots \int\limits_0^{\pi} \sin u_n du_n =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin^n u_1 du_1 \cdot 2\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} u_2 du_2 \cdots 2\int_0^{\pi/2} \sin u_n du_n. \qquad (11.60)$$

Из соотношений (7.54) и (7.53), ч. II, получаем

$$2\int_0^{\pi/2} \sin^{2y-1}\varphi \cos^{2x-1}\varphi d\varphi = \beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \qquad (11.61)$$

Полагая в равенстве (11.61) $x = 1/2$, $y = (n+1)/2$, будем иметь

$$2\int_0^{\pi/2} \sin^n \varphi d\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}\sqrt{\pi}, \qquad (11.62)$$

поскольку $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Отсюда и из равенства (11.60) следует, что объем n-мерного единичного шара

$$v = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (11.63)$$

Объем v n-мерного шара радиусом a можно определить по формуле

$$v = \frac{(a\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (11.64)$$

11.3. ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Площадь поверхности. С помощью двойного интеграла можно вычислить площадь гладкой поверхности. Напомним способы задания поверхностей в пространстве $\mathbf{R}^3$.

1. Явное задание поверхности. Пусть D — область на плоскости XY. Если

$$z = f(x, y), \ (x, y) \in D \qquad (11.65)$$

есть функция, имеющая на D непрерывные частные производные f'_x и f'_y, то график G_f этой функции называется *гладкой поверхностью* S. Будем говорить, что поверхность S в этом случае задана *явно* уравнением (11.65).

2. Неявное задание поверхности. Пусть в области $V \in \mathbf{R}^3$ задана функция $F = F(x, y, z)$, непрерывная вместе со своими частными производными F'_x, F'_y, F'_z. Предположим, что $\operatorname{grad} F = (F'_x, F'_y, F'_z) \neq 0$, $\forall (x, y, z) \in V$. Тогда множество S точек, удовлетворяющее уравнению

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (11.66)$$

называется поверхностью S, заданной *неявно*.

3. Параметрическое задание поверхности. Пусть на декартовой плоскости UV выделена область W, в которой определены функции:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v); \\ y &= y(u, v); \\ z &= z(u, v), \ (u, v) \in W. \end{aligned}\right\} \tag{11.67}$$

Эти функции, по предположению, непрерывно дифференцируемы в W, причем якобианы

$$\left|\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}; \quad \left|\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix};$$

$$\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

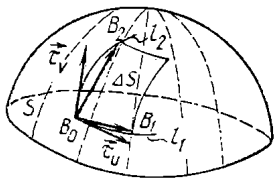
не равны одновременно нулю для каждой точки $(u, v) \in W$.

Для всех $(u, v) \in W$, согласно равенству (11.67), соответствует единственная точка $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Образ области W при отображении (11.67) есть некоторая поверхность S в $\mathbf{R}^3$, которая называется заданной *параметрически* с параметрами u и v из W.

Определим площадь поверхности и получим формулы для ее вычисления.

Пусть поверхность задана параметрически равенствами (11.67). Рассмотрим прямые $u = c = \text{const}$ и $v = c = \text{const}$ на плоскости UV, параллельные координатным осям U и V. Этим прямым на поверхности S соответствуют кривые $l_1 = \{x = x(u, c), \ y = y(u, c), \ z = z(u, c)\}$ и $l_2 = \{x = x(c, v), \ y = y(c, v), \ z = z(c, v)\}$ (рис. 11.32). Векторы $\vec{\tau}_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$ и $\vec{\tau}_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$ направлены по касательным к кривым l_1 и l_2 соответственно, т. е. они параллельны плоскости, касательной к поверхности S в точке B_0. Тогда вектор

$$\mathbf{n} = [\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \left(\left|\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right|, \left|\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right|, \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|\right) \tag{11.68}$$



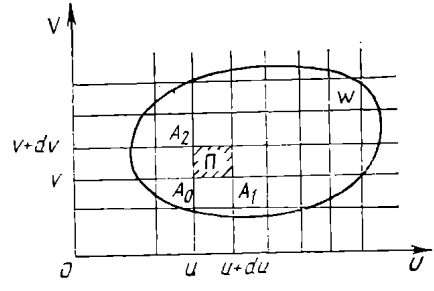


Рис. 11.32

перпендикулярен к плоскости, касательной к поверхности S в точке B_0. Вектор $\mathbf{n}$ называется *нормалью к поверхности S.*

Разобьем область W на прямоугольники и рассмотрим один из них. Пусть вершины прямоугольника Π имеют вид $A_0 = (u, v)$, $A_1 = (u + \Delta u, v)$, $A_2 = (u, v + \Delta v)$. Функции (11.67) отображают точки A_0, A_1 и A_2 в точки:

$$B_0 = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)); \; B_1 = (x(u + \Delta u, v), y(u + \Delta u, v), z(u + \Delta u, v)); \; B_2 = (x(u, v + \Delta v), y(u, v + \Delta v), z(u, v + \Delta v)).$$

Тогда:

$$\overrightarrow{B_0B_1} = \begin{pmatrix} x(u + \Delta u, v) - x(u, v) \\ y(u + \Delta u, v) - y(u, v) \\ z(u + \Delta u, v) - z(u, v) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x'_u \Delta u \\ y'_u \Delta u \\ z'_u \Delta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} \Delta u = \vec{\tau}_u \Delta u;$$

$$\overrightarrow{B_0B_2} = \begin{pmatrix} x(u, v + \Delta v) - x(u, v) \\ y(u, v + \Delta v) - y(u, v) \\ z(u, v + \Delta v) - z(u, v) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x'_v \Delta v \\ y'_v \Delta v \\ z'_v \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix} \Delta v = \vec{\tau}_u \Delta v.$$

Эти векторы порождают параллелограмм с вершиной в точке B_0, площадь которого

$$\Delta s = \left| \left[\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v \right] \right| \Delta u \Delta v = |\mathbf{n}| \Delta u \Delta v. \tag{11.69}$$

Просуммировав все эти площади, получим величину, которая и принимается приближенно за площадь поверхности S. Перейдя к пределу при $\max \Delta u \to 0$ и $\max \Delta v \to 0$, получим точное значение площади поверхности

$$S = \iint\limits_W \left| \left[\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v \right] \right| du dv = \iint\limits_W |\mathbf{n}| \, du dv. \tag{11.70}$$

Величина $|\mathbf{n}| \, du dv$ называется *дифференциалом площади поверхности* ds: $ds = |\mathbf{n}| \, du dv$.

Из формулы (11.69) получаем

$$S = \iint\limits_W \sqrt{\left| \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right|^2} \, du dv =$$

$$= \iint\limits_W \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du dv, \tag{11.71}$$

где

$$A = \left| \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right|; \; B = \left| \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \right|; \; C = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right|. \tag{11.72}$$

Если поверхность S задана явно уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, то положив $x = u$, $y = v$, перейдем к параметрическому заданию поверхности вида

$$\left.\begin{aligned} x &= u; \\ y &= v; \\ z &= f(u, v), \; (u, v) \in D. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда:

$$\tau_u = (x'_u,\ y'_u,\ z'_u)^T = (1,\ 0,\ f'_u)^T = (1,\ 0,\ f'_x)^T;$$
$$\tau_v = (x'_v,\ y'_v,\ z'_v)^T = (0,\ 1,\ f'_v)^T = (0,\ 1,\ f'_y)^T,$$

так как $u = x$, $v = y$. В этом случае

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = (-f'_x,\ -f'_y,\ 1). \tag{11.73}$$

Тогда площадь поверхности S, заданной явно уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, в соответствии с равенством (11.70) можно выразить формулой

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}\, dxdy. \tag{11.74}$$

Выражение $ds = \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}\, dxdy$ есть дифференциал площади поверхности, заданной явно уравнением $z = f(x, y)$.

Пусть теперь поверхность S задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$. Определяемая этим уравнением функция $z = f(x, y)$, согласно теореме 6.9, ч. II, имеет частные производные $f'_x = -F'_x/F'_z$, $f'_y = -F'_y/F'_z$. Отсюда и из равенства (11.74) получим, что площадь поверхности S, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, определяется формулой

$$S = \iint\limits_D \frac{1}{|F'_z|} \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}\, dxdy, \tag{11.75}$$

где D — проекция поверхности S на плоскость XY.

Подынтегральное выражение в равенстве (11.75) есть дифференциал площади поверхности в случае ее неявного задания.

Пример 1. Найти площадь поверхности $z = 10 + \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, где $y \geqslant x^2$, $y \leqslant 1$.

□ Поверхность задана явно. Находим $z'_x = \sqrt{3}\, \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z'_y = \sqrt{3}\, \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Тогда $\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + \dfrac{3x^2}{x^2 + y^2} + \dfrac{3y^2}{x^2 + y^2}} = 2$. По формуле (11.74) искомая площадь

$$S = \iint\limits_D 2dxdy = 2 \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} dy = 2 \int\limits_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = 8/3$$

(область D изображена на рис. 11.33).

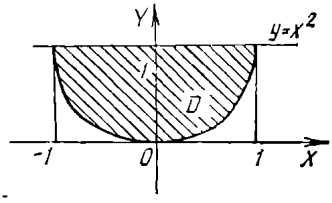


Рис. 11.33

Пример 2. Вычислить площадь поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

□ Зададим сферу параметрически. Для этого введем следующие параметры: θ — угол между осью Z и радиусом-вектором r произвольной точки (x, y, z) сферы; φ — угол между осью X и проекцией r на плоскость XY. Тогда для любой точки (x, y, z) сферы радиусом a с центром в начале координат имеем: $x = a\sin\theta\cos\varphi$, $y = a\sin\theta\sin\varphi$, $z = a\cos\theta$, где $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Это и есть искомые параметрические уравнения сферы. Тогда

$$\left|\frac{D(y, z)}{D(\theta, \varphi)}\right| = \begin{vmatrix} a\cos\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi \\ -a\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = a^2\sin^2\theta\cos\varphi;$$

$$\left|\frac{D(z, x)}{D(\theta, \varphi)}\right| = \begin{vmatrix} -a\sin\theta & 0 \\ a\cos\theta\cos\varphi & a\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = a^2\sin^2\theta\sin\varphi;$$

$$\left|\frac{D(x, y)}{D(\theta, \varphi)}\right| = \begin{vmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi \\ a\cos\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = a^2\sin\theta\cos\theta.$$

Отсюда

$$\left|\frac{D(y, z)}{D(\theta, \varphi)}\right|^2 + \left|\frac{D(z, x)}{D(\theta, \varphi)}\right|^2 + \left|\frac{D(x, y)}{D(\theta, \varphi)}\right|^2 = a^4\sin^2\theta.$$

По формуле (11.71) находим площадь поверхности сферы радиусом a:

$$S = \iint\limits_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant\pi \\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} a^2\sin\theta d\theta d\varphi = a^2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = 4\pi a^2.$$

Пример 3. Определить площадь части поверхности конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geqslant 0$, вырезаемой из него цилиндром $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$.

□ Поверхность задана неявно уравнением $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Ее проекция D на плоскость XY есть круг $(x^2 + y^2 \leqslant 2ax) \Leftrightarrow ((x-a)^2 + y^2 \leqslant a^2)$. Находим $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$, $F'_z = -2z$, $\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. С учетом того, что для конуса $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$, по формуле (11.75) имеем

$$S = \iint\limits_D \frac{1}{z}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}\iint\limits_D dxdy.$$

Интеграл же $\iint\limits_D dxdy$ выражает площадь D, равную πa^2, поэтому $S = \sqrt{2}\,\pi a^2$.

Центр тяжести плоской пластинки. Пусть в плоскости XY задана пластинка D с непрерывно распределенной поверхностной плотностью $\mu(x, y)$. Найдем координаты ее центра тяжести. Для этого пластинку D разобьем на части D_i, площади которых Δs_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. В каждой части D_i выберем произвольно точку (ξ_i, η_i) и будем рассматривать пластинку как систему материальных точек, массы которых $m_i = \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$ сосредоточены в точках $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для координат x_c, y_c центра тяжести этой системы получим следующие выражения:

$$x_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\mu(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i};$$

$$y_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i \mu(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_i}, \qquad (11.76)$$

являющиеся приближенными значениями координат центра тяжести пластинки D. Переходя к пределу при $\max d_i \to 0$ (d_i — диаметр части D_i), получим точные значения этих координат:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\mu(x, y)\,dxdy}{\iint\limits_D \mu(x, y)\,dxdy}; \quad y_c = \frac{\iint\limits_D y\mu(x, y)\,dxdy}{\iint\limits_D \mu(x, y)\,dxdy}. \qquad (11.77)$$

Величины

$$M_X = \iint\limits_D y\mu(x, y)\,dxdy; \quad M_Y = \iint\limits_D x\mu(x, y)\,dxdy$$

называются *статическими моментами пластинки относительно осей X и Y* соответственно.

Таким образом, $x_c = M_Y/m$, $y_c = M_X/m$.

Момент инерции пластинки. Момент инерции материальной точки относительно оси равен произведению массы точки на квадрат расстояния от нее до этой оси. Момент инерции — величина аддитивная, т. е. момент инерции системы материальных точек относительно одной и той же оси равен сумме моментов инерций отдельных точек системы.

Пусть в плоскости XY дана пластинка D с поверхностной плотностью $\mu(x, y)$. Требуется найти ее момент инерции I_X, I_Y, I_O относительно осей X, Y и начала координат соответственно.

Осуществив разбиение пластинки D на части D_i с площадями Δs_i и выбрав в каждой из них произвольную точку (ξ_i, η_i), заменим пластинку системой материальных точек, массы $\mu(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_i$ которых сосредоточены в точках (ξ_i, η_i). Для такой системы моменты инерции относительно осей и начала координат равны приближенно ($I_O = I_X + I_Y$):

$$I_X = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \mu(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_i; \quad I_Y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \mu(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_i;$$

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} (\eta_i^2 + \xi_i^2)\,\mu(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_i. \qquad (11.78)$$

В пределе при $\max d_i \to 0$ из формул (11.78) получим точные значения моментов инерции:

$$I_X = \iint\limits_D y^2\mu(x, y)\,dxdy; \quad I_Y = \iint\limits_D x^2\mu(x, y)dxdy;$$

$$I_O = I_X + I_Y = \iint\limits_D (y^2 + x^2)\,\mu(x, y)\,dxdy. \qquad (11.79)$$

Пример 4. Найти координаты центра тяжести и моменты инерции пластинки $D = \{y \geqslant x^2,\ y \leqslant 1\}$, изображенной на рис. 11.33, если плотность $\mu(x, y) = x^2y$.

□ Определим сначала массу пластинки:

$$m = \iint\limits_D x^2y\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} x^2dx \int\limits_{x^2}^{1} ydy = \frac{4}{21}.$$

Координаты центра тяжести найдем по формулам (11.77):

$$x_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D x^3y\,dxdy = \frac{21}{4}\int\limits_{-1}^{1} x^3dx \int\limits_{x^2}^{1} ydy = 0;$$

$$y_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D x^2y^2\,dxdy = \frac{21}{4}\int\limits_{-1}^{1} x^2dx \int\limits_{x^2}^{1} y^2dy = \frac{7}{9}.$$

По формулам (11.79) находим моменты инерции:

$$I_X = \iint\limits_D x^2y^3\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} x^2dx \int\limits_{x^2}^{1} y^3dy = \frac{4}{33};$$

$$I_Y = \iint\limits_D x^4y\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} x^4dx \int\limits_{x^2}^{1} ydy = \frac{4}{45};$$

$$I_O = \frac{4}{33} + \frac{4}{45} = \frac{104}{495}.$$

Центр тяжести тела. Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ заданы n материальных точек, массы которых $m_1, m_2, \ldots, m_n$ соответственно. Пусть x_i, y_i, z_i — декартовы координаты i-й точки, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда координаты центра тяжести этих точек определяются формулами:

$$x_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} x_im_i;\quad y_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} y_im_i;\quad z_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} z_im_i, \qquad (11.80)$$

где $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$.

Пусть теперь в пространстве $\mathbf{R}^3$ задано тело V, объемная плотность $\mu(x, y, z)$ которого непрерывно распределена в нем. Разбивая это тело на n частей V_i и поступая в дальнейшем так же, как и при выводе формул координат центра тяжести пластинки, с учетом выражений (11.80) получим следующие формулы для координат центра тяжести тела ($dv = dxdydz$):

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\mu(x, y, z)\,dv;\quad y_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\mu(x, y, z)\,dv;$$

$$z_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_V z\mu(x,\ y,\ z)\,dv, \tag{11.81}$$

где $m = \iiint\limits_V \mu(x,\ y,\ z)\,dv$ — масса тела V.

Величины

$$M_X = \iiint\limits_V x\mu(x,\ y,\ z)\,dv;\ M_Y = \iiint\limits_V y\mu(x,\ y,\ z)\,dv; \tag{11.82}$$

$$M_Z = \iiint\limits_V z\mu(x,\ y,\ z)\,dv$$

называются статическими моментами тела V относительно плоскостей YZ $(x = 0)$, $ZX\,(y = 0)$ и $XY\,(z = 0)$ соответственно.

Если масса распределена по поверхности S, заданной, например, параметрически, с поверхностной плотностью $\mu(u,\ v)$ ($u,\ v$ — параметры), то статические моменты этой поверхности определяются как интегралы:

$$\left.\begin{aligned} M_X &= \iint\limits_W x\mu(u,\ v)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,dudv,\ x = x(u,\ v);\\ M_Y &= \iint\limits_W y\mu(u,\ v)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,dudv,\ y = y(u,\ v);\\ M_Z &= \iint\limits_W z\mu(u,\ v)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,dudv,\ z = z(u,\ v), \end{aligned}\right\} \tag{11.83}$$

где W — область изменения параметров $u,\ v$; $A,\ B,\ C$ — якобианы (11.72). Тогда центр тяжести поверхности имеет координаты:

$$x_c = M_X/m;\ y_c = M_Y/m;\ z_c = M_Z/m, \tag{11.84}$$

где

$$m = \iint\limits_W \mu(u,\ v)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,dudv \tag{11.85}$$

есть масса поверхности S.

Пример 5. Найти центр тяжести однородного полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, $z \geqslant 0$ (плотность $\mu = 1$).

□ Определим статические моменты M_X, M_Y и M_Z относительно координатных плоскостей $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ соответственно.

Переходя к цилиндрическим координатам по формулам (11.81), находим

$$M_X = \iiint\limits_V xdxdydz = \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 d\rho \int\limits_0^{\sqrt{1-\rho^2}} dz = 0.$$

Аналогично получим, что $M_Y = 0$, а

$$M_Z = \iiint\limits_V zdxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_0^{\sqrt{1-\rho^2}} zdz = \pi/4.$$

Так как плотность $\mu = 1$, то масса полушара численно равна его объему, т. е. $m = 2\pi/3$. По формулам (11.84) получаем, что центр тяжести полушара находится в точке $\frac{1}{m}(M_X,\ M_Y,\ M_Z) = \left(0,\ 0,\ \frac{3}{8}\right)$.

Пример 6. Масса распределена равномерно по верхней полусфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (поверхностная плотность $\mu = 1$). Найти центр тяжести полусферы.

□ Зададим полусферу параметрически: $x = \sin\theta\cos\varphi$, $y = \sin\theta\sin\varphi$, $z = \cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Из примера 2 при $a = 1$ получаем $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sin\theta$. Тогда по формулам (11.83) будем иметь:

$$M_X = \iint\limits_W x\sin\theta d\theta d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta = 0;$$

$$M_Y = \iint\limits_W y\sin\theta d\theta d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta = 0;$$

$$M_Z = \iint\limits_W z\sin\theta d\theta d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta d\theta = \pi.$$

Так как масса полусферы численно равна половине площади поверхности сферы ($\mu = 1$), т. е. $m = 2\pi$, по формулам (11.84) находим $x_c = 0$, $y_c = 0$, $z_c = 0{,}5$.

Моменты инерции тела. По аналогии с моментами инерции плоской пластинки момент инерции тела V относительно оси X

$$I_X = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\,\mu(x, y, z)\,dxdydz,$$

где $\mu(x, y, z)$ — объемная плотность тела; $y^2 + z^2$ — квадрат расстояния от точки (x, y, z) до оси X.

Аналогично определяются моменты инерции осносительно осей Y и Z:

$$I_Y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\,\mu(x, y, z)\,dxdydz;$$

$$I_Z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\,\mu(x, y, z)\,dxdydz.$$

Момент инерции тела V относительно начала координат определяется соотношением

$$I_O = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\,\mu(x, y, z)\,dxdydz.$$

Моменты инерции тела V относительно плоскостей XY, YZ и ZX определяются интегралами:

$$I_{XY} = \iiint\limits_V z^2\mu(x, y, z)\,dxdydz; \quad I_{YZ} = \iiint\limits_V x^2\mu(x, y, z)\,dxdydz;$$

$$I_{ZX} = \iiint\limits_V y^2\mu(x, y, z)\,dxdydz.$$

11.4. КРАТНЫЕ НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Несобственные интегралы от неограниченных функций. Кратный интеграл называется *несобственным*, если либо область интегрирования, либо подынтегральная функция, либо и то и другое неограниченны.

Пусть функция $f(x, y)$ задана в замкнутой области D. Точка $M_0 = (x_0, y_0)$ называется *особой точкой* функции f, если в любой ее окрестности $U_\delta(M_0)$ радиусом δ функция f не ограничена или не определена. Если функция $f(x, y)$ имеет в области D единственную особую точку M_0 и непрерывна в области $D \setminus U_\delta(M_0)$, то *несобственным двойным интегралом от функции* $f(x, y)$ *по области* D называется предел

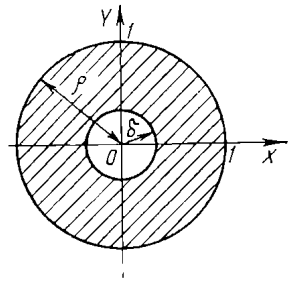


Рис. 11.34

$$\lim_{\delta \to 0} \iint_{D \setminus U_\delta(M_0)} f(x, y)\, dxdy. \tag{11.86}$$

Итак, по определению,

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{\delta \to 0} \iint_{D \setminus U_\delta(M_0)} f(x, y)\, dxdy. \tag{11.87}$$

Если предел (11.86) существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*. Если же предел (11.86) не существует, то несобственный интеграл называется *расходящимся*. Интеграл $\iint_D f(x, y)\, dxdy$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\iint_D |f(x, y)|\, dxdy$.

Как и в случае одномерных несобственных интегралов, *всякий абсолютно сходящийся кратный несобственный интеграл сходится.*

Пример 1. Исследовать на сходимость интеграл

$$I = \iint_D \ln \sqrt{x^2 + y^2}\; dxdy, \quad D: x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

□ Функция $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ обращается в бесконечность в начале координат. «Вырежем» δ-окрестность начала координат $U_\delta(0) = \{x^2 + y^2 < \delta\}$ и вычислим интеграл по оставшейся области (по кольцу) (рис. 11.34). Перейдем к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тогда область $W = \{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ \delta \leqslant \rho \leqslant 1\}$. По определению (11.87),

$$I = \iint_D \ln \sqrt{x^2 + y^2}\; dxdy = \lim_{\delta \to 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\delta^1 \rho \ln \rho d\rho = 2\pi \lim_{\delta \to 0} \int_\delta^1 \rho \ln \rho d\rho.$$

Применив к этому интегралу формулу интегрирования по частям, получим

$$I = 2\pi \lim_{\delta \to 0} \left(\frac{\rho^2}{2} \ln \rho - \frac{1}{4} \rho^2 \right) \Big|_\delta^1 = -\frac{\pi}{2} - 2\pi \lim_{\delta \to 0} \left(\frac{\delta^2 \ln \delta}{2} - \frac{1}{4} \delta^2 \right) = -\frac{\pi}{2},$$

так как $\lim\limits_{\delta \to 0} \delta^2 \ln \delta = 0$.

Таким образом, искомый интеграл I сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^\alpha}}, \quad D: x^2 + y^2 \leqslant R^2. \tag{11.88}$$

□ Рассмотрим интеграл (11.88) по кольцу $\delta \leqslant x^2+y^2 \leqslant R^2$. Перейдя к полярным координатам, получим

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}} = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_\delta^R \frac{\rho d\rho}{\rho^2} = 2\pi \lim_{\delta\to 0} \int\limits_0^R \frac{d\rho}{\rho^{\alpha-1}}.$$

Известно (см. пример 13, § 5.10, ч. II), что несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{\alpha-1}}$ сходится при $\alpha-1<1$, т. е. $\alpha<2$, и расходится при $\alpha\geqslant 2$. Таким образом, несобственный интеграл (11.88) сходится при $\alpha<2$ и расходится при $\alpha\geqslant 2$.

Теория несобственных кратных интегралов во многом сходна с теорией несобственных интегралов от функций одной переменной. Так, например, справедлива

Теорема 11.5 (признак сравнения). Пусть в области D определены две неотрицательные функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ и $f(x, y)\leqslant g(x, y)$, $\forall (x, y)\in D$. Тогда из сходимости несобственного интеграла $\iint\limits_D g(x, y)\,dxdy$ следует сходимость несобственного интеграла $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$, а из расходимости несобственного интеграла $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$ — расходимость несобственного интеграла $\iint\limits_D g(x, y)dxdy$.

Из этой теоремы вытекает очевидное

Следствие. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна всюду в замкнутой области D, содержащей O, за исключением самого начала координат, где она обращается в бесконечность. Если существуют числа $C>0$ и $\alpha<2$, такие, что

$$|f(x, y)|\leqslant \frac{C}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}},\ \forall (x, y)\in D,$$

то несобственный интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$ сходится.

Аналогичные результаты имеют место и для тройных несобственных интегралов.

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл

$$I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}},\ D: x^2+y^2+z^2\leqslant 1. \qquad (11.89)$$

□ Перейдя к сферическим координатам, получим

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^\pi \frac{r^2\sin\theta}{r^\alpha} d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^\pi \sin\theta d\theta \int\limits_0^1 \frac{dr}{r^{\alpha-2}} =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^1 r^{2-\alpha} dr = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3-\alpha}, & \alpha<3; \\ \infty, & \alpha\geqslant 3. \end{cases}$$

Таким образом, интеграл (11.88) сходится при $\alpha < 3$ и расходится при $\alpha \geqslant 3$.

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\iiint\limits_V \frac{2 - \sin x + e^{xy}}{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz, \tag{11.90}$$

где V — ограниченная замкнутая область в $\mathbf{R}^3$, содержащая начало координат.

□ В замкнутой ограниченной области V непрерывная функция $f(x, y, z) = 2 - \sin x + e^{xy}$ в соответствии с теоремой Вейерштрасса принимает максимальное значение $C = \max\limits_{(x, y, z) \in V} f(x, y, z)$.

Тогда

$$\left| \frac{2 - \sin x + e^{xy}}{x^2 + y^2 + z^2} \right| \leqslant \frac{C}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Отсюда, согласно теореме 11.5, примеру 3, несобственный интеграл (11.90) сходится (здесь $\alpha = 2 < 3$).

Несобственные интегралы по неограниченной области. Если область интегрирования D неограничена, выбираем последовательность ограниченных областей интегрирования D_1, D_2, D_3, ..., монотонно исчерпывающих область D, т. е. $D_n \subset D_{n+1}$, $\forall n$ и $D_n \to D$, $n \to \infty$. Например, если область интегрирования D совпадает со всей плоскостью XY, то за последовательность D_n можно принять совокупность кругов $x^2 + y^2 \leqslant a_n^2$, $a_n < a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, с центром в начале координат.

Несобственным интегралом по неограниченной области интегрирования называется предел

$$\lim_{n \to \infty} \iint\limits_{D_n} f(x, y)\, dxdy, \tag{11.91}$$

не зависящий от выбора последовательности D_n.

Итак, по определению,

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{n \to \infty} \iint\limits_{D_n} f(x, y)\, dxdy. \tag{11.92}$$

Если предел (11.91) существует и конечен, то несобственный интеграл по неограниченной области называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Пример 5. Исследовать на сходимость интеграл

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \quad D\colon -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty. \tag{11.93}$$

□ Так как область интегрирования D совпадает со всей плоскостью XY, то в качестве областей интегрирования D_n выберем круги $x^2 + y^2 \leqslant n^2$ радиусом n. Перейдя к полярным координатам, получим

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \lim_{n \to \infty} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^n \frac{\rho d\rho}{(1 + \rho^2)^2} =$$

$$= 2\pi \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2(1+\rho^2)}\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=n} = \lim_{n\to\infty} 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+n^2)}\right) = \pi.$$

Итак, интеграл (11.93) сходится.

Признак сравнения справедлив и для интеграла по неограниченной области D. Именно, если $0 \leqslant f(x, y) \leqslant g(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$ и интеграл $\iint\limits_D g(x, y)\,dxdy$ сходится, то сходится и интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$. Если же интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$ расходится, то расходится и интеграл $\iint\limits_D g(x, y)\,dxdy$.

Интегралы, сходящиеся по всей плоскости, можно вычислять с помощью повторного интегрирования:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx. \quad (11.94)$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx$, $a > 0$.

□ Так как $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2}dy$, то, согласно соотношению (11.94),

$$I^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2}dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)}dxdy.$$

Перейдя в двойном интеграле к обобщенным полярным координатам $x = \frac{1}{\sqrt{a}}\rho\cos\varphi$, $y = \frac{1}{\sqrt{a}}\rho\sin\varphi$ с якобианом $\left|\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)}\right| = \frac{\rho}{a}$, получим область $W = \{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ \rho \geqslant 0\}$. Следовательно,

$$I^2 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{a} e^{-\rho^2}\rho d\rho = \frac{2\pi}{a}\left(-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \frac{\pi}{a},$$

откуда

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},\ a > 0. \quad (11.95)$$

12. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

12.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Задачи, приводящие к криволинейным интегралам первого рода. Рассмотрим некоторые физические задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла.

1. Масса дуги. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^3$ гладкую дугу l. Предположим, что в точках ее непрерывно распределена масса линейной плотностью $\mu = \mu(x, y, z)$. Требуется определить массу дуги.

Разобьем дугу l произвольным образом на n частей $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Пусть Δl_i — длина участка l_i. В части l_i возьмем произвольно точку (x_i, y_i, z_i). Предполагая плотность участка l_i постоянной и равной $\mu(x_i, y_i, z_i)$, получаем, что масса участка l_i $\Delta m_i = \mu(x_i, y_i, z_i)\,\Delta l_i$. Суммарная масса всех n участков дуги будет приближенно равна массе дуги l:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i, y_i, z_i)\,\Delta l_i.$$

Обозначим $\Delta = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta l_i$. Если существует предел

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i, y_i, z_i)\,\Delta l_i,$$

обозначаемый символом $\int\limits_l \mu(x, y, z)\,dl$, то он и определяет массу дуги l.

Таким образом, масса дуги l, линейная плотность которой $\mu(x, y, z)$, определяется равенством

$$m = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i, y_i, z_i)\,\Delta l_i = \int_l \mu(x, y, z)\,dl. \qquad (12.1)$$

2. Координаты центра тяжести кривой. Пусть вдоль пространственной кривой l непрерывно распределена масса, линейная плотность которой $\mu = \mu(x, y, z)$. Разбивая эту кривую на части длиной Δl_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и выбирая на каждой из частей произвольно точку (x_i, y_i, z_i), будем рассматривать кривую l как систему материальных точек, массы $\mu(x_i, y_i, z_i)\,\Delta l_i$ которых расположены в точках (x_i, y_i, z_i). Тогда центр тяжести такой системы материальных точек имеет координаты, равные приближенно:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{x}_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mu(x_i,\ y_i,\ z_i)\,\Delta l_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(x_i,\ y_i,\ z_i)\,\Delta l_i};\\
\bar{y}_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \mu(x_i,\ y_i,\ z_i)\,\Delta l_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(x_i,\ y_i,\ z_i)\,\Delta l_i};\\
\bar{z}_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i \mu(x_i,\ y_i,\ z_i)\,\Delta l_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(x_i,\ y_i,\ z_i)\,\Delta l_i}.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.2)$$

Для получения точных значений координат центра тяжести кривой l перейдем в равенствах (12.2) к пределу при $\Delta = \max \Delta l_i \to 0$. Обозначим эти пределы (если они существуют):

$$x_c = \frac{1}{m}\int\limits_l x\mu(x,\ y,\ z)\,dl; \quad y_c = \frac{1}{m}\int\limits_l y\mu(x,\ y,\ z)\,dl;$$
$$z_c = \frac{1}{m}\int\limits_l z\mu(x,\ y,\ z)\,dl; \quad m = \int\limits_l \mu(x,\ y,\ z)\,dl. \qquad (12.3)$$

Итак, координаты центра тяжести пространственной кривой l определяются формулами (12.3).

Определение криволинейного интеграла первого рода. Пусть на плоскости XY задана гладкая кривая l, в точках которой определена непрерывная функция $f(x,\ y)$. Кривую l произвольным образом разобьем на части l_i длиной Δl_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. В части l_i выберем произвольно точку $(x_i,\ y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\,\Delta l_i. \qquad (12.4)$$

Пусть $\Delta = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta l_i$. Если существует предел

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\,\Delta l_i,$$

не зависящий ни от способа деления дуги l на части l_i, ни от выбора точек $(x_i,\ y_i) \in l_i$, то этот предел называется *криволинейным интегралом первого рода по дуге l от функции $f(x,\ y)$* и обозначается $\int\limits_l f(x,\ y)\,dl$.

Таким образом, по определению,

$$\int\limits_l f(x,\ y)\,dl = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\,\Delta l_i. \qquad (12.5)$$

Аналогично, если l — гладкая кривая в пространстве $\mathbf{R}^3$, а $f(x, y, z)$ — непрерывная функция в точках этой кривой, то криволинейный интеграл по l определяется равенством

$$\int_l f(x, y, z)\, dl = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta l_i. \tag{12.6}$$

Вычисление криволинейных интегралов первого рода. Пусть кривая l задана на плоскости уравнением $y = g(x)$, $x \in [a, b]$, а $f(x, y)$ — непрерывная в точках этой кривой функция. Точки $(x, y) \in l$ имеют вид $(x, g(x))$, $x \in [a, b]$. Тогда функция $f(x, y)$ в точках кривой l имеет вид $f(x, y) = f(x, g(x))$, а длина i-й части l_i приближенно $\Delta l_i \approx \sqrt{1 + g'^2(x_i)}\, \Delta x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (см. формулу 5.102, ч. II). Тем самым интегральная сумма (12.4) преобразуется к виду

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, g(x_i)) \sqrt{1 + g'^2(x_i)}\, \Delta x_i.$$

Отсюда в пределе при $\Delta \to 0$ получим

$$\int_l f(x, y)\, dl = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + g'^2(x)}\, dx. \tag{12.7}$$

Если же кривая l задана параметрически в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то аналогично предыдущему получим

$$\int_l f(x, y)\, dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt. \tag{12.8}$$

Пример 1. Найти массу дуги окружности l: $x^2 + y^2 = ax$ с линейной плотностью $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$.

□ Согласно равенству (12.1), имеем $m = \int_l \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$. Окружность $(x^2 + y^2 = ax) \Leftrightarrow \left(\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}\right)$ запишем в параметрическом виде: $x - a/2 = \frac{a}{2}\cos t$, $y = \frac{a}{2}\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогда по формуле (12.8)

$$m = \int_l \sqrt{x^2 + y^2}\, dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{a}{2}\cos t + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\sin t\right)^2} \times$$

$$\times \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\sin t\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\cos t\right)^2}\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left|\cos \frac{t}{2}\right| dt = a^2 \int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2}\, dt = 2a^2.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_l xdl$, где l — дуга параболы $y = x^2/\sqrt{2}$, соединяющая точки $(0, 0)$ и $(2, 2\sqrt{2})$.

□ Так как $x \in [0, 2]$ и $y' = \sqrt{2}\,x$, то, согласно формуле (12.7),

$$\int\limits_l xdl = \int\limits_0^2 x\sqrt{1+2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^2 (1+2x^2)^{1/2}\,d(1+2x^2) =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{(1+2x^2)^3}\Big|_0^2 = \frac{13}{3}.$$

Пусть пространственная кривая l задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Так как в этом случае $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$, то криволинейный интеграл (12.6) вычисляется по формуле

$$\int\limits_l f(x, y, z)\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt. \tag{12.9}$$

Пример 3. Найти массу дуги $l = \{x = t,\ y = t^2/2,\ z = t^3/3;\ t \in [0, 1]\}$, если линейная плотность $\mu = \sqrt{1 + x^2 + 4y^2}$.

□ По формуле (12.9)

$$m = \int\limits_l \sqrt{1 + x^2 + 4y^2}\,dl = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + t^2 + t^4}\,\sqrt{1 + t^2 + t^4}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (1 + t^2 + t^4)\,dt = \frac{23}{15}.$$

Свойства криволинейного интеграла первого рода. Перечислим основные свойства криволинейного интеграла первого рода. Доказательства их во многом повторяют доказательства соответствующих свойств одномерных или кратных интегралов и потому опускаются.

1°. (Линейность.) Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — функции, непрерывные вдоль кривой l. Тогда для любых c_1 и c_2 из $\mathbf{R}$

$$\int\limits_l (c_1 f_1(x, y) + c_2 g(x, y))\,dl = c_1 \int\limits_l f(x, y)\,dl + c_2 \int\limits_l g(x, y)\,dl.$$

2°. (Аддитивность.) Если кусочно-гладкая кривая l состоит из конечного числа гладких дуг l_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\int\limits_l f(x, y)\,dl = \sum_{k=1}^n \int\limits_{l_k} f(x, y)\,dl. \tag{12.10}$$

3°. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования. Это означает, что если кривая l сое-

диняет точки M и N, то криволинейный интеграл первого рода по дуге l от M до N равен интегралу по этой дуге от N до M. Это символически записывается в виде

$$\int\limits_{MN} f(x, y)\, dl = \int\limits_{NM} f(x, y)\, dl.$$

4°. (Оценка модуля интеграла.) Справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_l f(x, y)\, dl\right| \leqslant \int\limits_l |f(x, y)|\, dl.$$

5°. $\int\limits_l dl = L$, где L — длина дуги l.]

6°. (Теорема о среднем.) Если функция $f(x, y)$ непрерывна на кривой l, то существует точка $(\xi, \eta) \in l$, такая, что

$$\int\limits_l f(x, y)\, dl = f(\xi, \eta)\, L,$$

где L — длина кривой l.

Задача, приводящая к криволинейному интегралу второго рода. Работа силового поля вдоль кривой. Пусть в каждой точке области V пространства $\mathbf{R}^3$ задано непрерывное *силовое (векторное) поле* $\mathbf{a} = (P, Q, R)$, где $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ и $R = R(x, y, z)$ — непрерывные в V функции. При перемещении материальной точки вдоль гладкой кривой l поле $\mathbf{a}$ совершает некоторую работу A. Для ее определения произвольно разобьем кривую l на n частей l_i, длина каждой из которых равна Δl_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. В каждой части l_i выберем произвольно точку $M_i = (x_i, y_i, z_i)$. Пусть $\vec{\tau}_i^0$ — единичный вектор касательной к кривой l в точке M_i (рис. 12.1). Тогда элементарная работа ΔA_i поля $\mathbf{a}$ на участке l_i приближенно $\Delta A_i \approx (\mathbf{a}(M_i), \vec{\tau}_i^0)\, \Delta l_i$.

Работа же поля $\mathbf{a}$ по всей кривой l приближенно выразится суммой

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}(M_i), \vec{\tau}_i^0)\, \Delta l_i. \qquad (12.11)$$

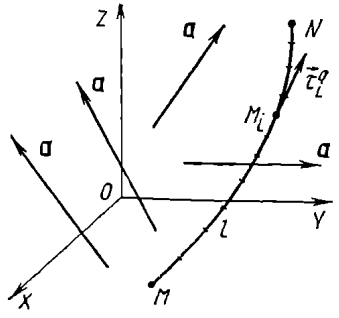


Рис. 12.1

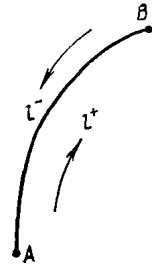


Рис. 12.2

Устремив $\Delta = \max\limits_i \Delta l_i$ к нулю, в пределе получим всю работу силового поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ вдоль дуги l: $A = \int\limits_l (\mathbf{a}, \vec{\tau}^\circ)\, dl$.

Таким образом, по определению,

$$A = \int\limits_l (\mathbf{a}, \vec{\tau}^\circ)\, dl = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\vec{\mathbf{a}}(M_i), \vec{\tau}_i^0)\, \Delta l_i. \qquad (12.12)$$

Определение криволинейного интеграла второго рода. Пусть функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ и $R = R(x, y, z)$ непрерывны в точках гладкой кривой $l = \{x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [\alpha, \beta]\}$. Точка $A = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ называется начальной точкой кривой l, а точка $B = (x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ — конечной. Предположим, что движение по кривой l происходит от начальной точки A к конечной точке B. Кривая, для которой выбраны начальная и конечная точки и указано направление движения, называется *ориентированной*: l^+ означает, что кривая l ориентирована и движение по ней происходит от начальной точки A к конечной B, а l^- — что движение происходит от B к A (рис. 12.2).

Разобьем кривую l на части l_i точками $M_0 = A$, M_1, M_2, ..., $M_n = B$. В каждой части l_i выберем произвольно точку $N_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\vec{\tau}_i^0$ — единичный вектор касательной к кривой l в точке N_i, указывающий направление движения вдоль кривой, а Δl_i — длина части l_i. Составим интегральную сумму для вектора-функции $\mathbf{a}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}(x_i, y_i, z_i), \vec{\tau}_i^0)\, \Delta l_i. \qquad (12.13)$$

Обозначим $\Delta = \max \Delta l_i$. Если при $\Delta \to 0$ существует предел интегральных сумм (12.13), не зависящий ни от способа разбиения кривой l на части l_i, ни от выбора точек $N_i \in l_i$, его называют *криволинейным интегралом второго рода от вектор-функции* $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ по кривой l и пишут $\int\limits_l (\mathbf{a}, \vec{\tau}^0)\, dl$.

Итак, по определению,

$$\int\limits_l (\mathbf{a}, \vec{\tau}^0)\, dl = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}(x_i, y_i, z_i), \vec{\tau}_i^0)\, \Delta l_i. \qquad (12.14)$$

Пусть гладкая кривая l задана параметрически в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. В этом случае, согласно равенству (5.101), ч. II,

$$dl = |\vec{\tau}|\, dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt, \qquad (12.15)$$

где $\vec{\tau} = (x'(t), y'(t), z'(t))$ — вектор, касательный к кривой l.

Так как $\vec{\tau}^0 = \vec{\tau}/|\vec{\tau}|$, то, согласно соотношению (12.15), подынтегральное выражение в левой части равенства (12.14) можно представить в виде

$$(\mathbf{a}, \vec{\tau}^0)\, dl = \left(\mathbf{a}, \frac{\vec{\tau}}{|\vec{\tau}|}\right)|\vec{\tau}|\, dt = (\mathbf{a}, \vec{\tau})\, dt =$$

$$= Px'(t)\, dt + Qy'(t)\, dt + Rz'(t)\, dt = Pdx + Qdy + Rdz. \quad (12.16)$$

Учитывая равенство (12.16), интеграл в левой части соотношения (12.14) можно представить в виде

$$\int_l (\mathbf{a}, \vec{\tau}^0)\, dl = \int_l Pdx + Qdy + Rdz. \quad (12.17)$$

Отсюда и из соотношения (12.14)

$$\int_l (\mathbf{a}, \vec{\tau}^0)\, dl = \int_l Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}(x_i, y_i, z_i), \vec{\tau}_i^0)\, \Delta l_i. \quad (12.18)$$

В точках параметрически заданной кривой l вектор-функция $\mathbf{a}$ имеет вид $\mathbf{a} = (P(x(t), y(t), z(t)), Q(x(t), y(t), z(t)), R(x(t), y(t), z(t)))$. Отсюда и из равенства (12.18) получаем *формулу вычисления криволинейного интеграла второго рода в случае параметрического задания кривой:*

$$\int_l P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta (\mathbf{a}(x(t), y(t), z(t)), \vec{\tau}(t))\, dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta (P(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) +$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t))\, z'(t))\, dt. \quad (12.19)$$

Если кривая l задана в плоскости XY параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, и $\mathbf{a} = (P(x, y), Q(x, y))$ — вектор-функция, определенная в точках этой кривой, то, как и в предыдущем случае, получаем формулу

$$\int_l P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int_\alpha^\beta (\mathbf{a}(x(t), y(t)), \vec{\tau}(t))\, dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta (P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t))\, dt. \quad (12.20)$$

Пусть теперь плоская кривая l задана явно уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, где $f(x)$ — гладкая функция. Эту кривую очевидным образом можно задать параметрически:

$$x = x;\ y = f(x),\ x \in [a, b]. \quad (12.21)$$

Тогда из равенств (12.20) и (12.21) имеем $\left(\vec{\tau} = (1, f'(x))\right)$:

$$\int_l P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_a^b \left(\mathbf{a}(x, f(x)), \vec{\tau}(x)\right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(P(x, f(x)) + Q(x, f(x))\,f'(x)\right) dx. \qquad (12.22)$$

Так как единичный вектор касательной $\vec{\tau}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора τ, касательного к кривой l, то из равенств (12.17) получаем

$$\int_l \left(\mathbf{a}, \vec{\tau}^0\right) dl = \int_l (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl =$$

$$= \int_l P dx + Q dy + R dz. \qquad (12.23)$$

Формула (12.23) устанавливает *связь между криволинейными интегралами первого и второго родов.*

Если l — плоская кривая и $\mathbf{a} = (P, Q)$, формула (12.23) принимает вид

$$\int_l \left(\mathbf{a}, \vec{\tau}^0\right) dl = \int_l (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,dl = \int_l P dx + Q dy, \qquad (12.24)$$

так как в этом случае $\vec{\tau}^0 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ $(\beta = \pi/2 - \alpha)$.

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int_l 2x^2 dx - (y^2 - x^2)\,dy, \qquad (12.25)$$

где l — часть параболы $y = x^2$ с начальной точкой $(0, 0)$ и конечной точкой $(2, 4)$.

□ Так как $x \in [0, 2]$, по формуле (12.22) для интеграла (12.25) имеем

$$\int_l 2x^2 dx - (y^2 - x^2)\,dy = \int_0^2 (2x^2 - (x^4 - x^2)\,2x)\,dx =$$

$$= \int_0^2 (2x^2 - 2x^5 - 2x^3)\,dx = -8.$$

Пример 5. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_l y dx + (x - z)\,dy + (x - y)\,dz, \qquad (12.26)$$

где l — линия пересечения цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ с плоскостью $x - z + 2 = 0$.

□ Запишем кривую параметрически. Поскольку проекцией цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ на плоскость XY является окружность $x^2 + y^2 = R^2$, то координаты x и y точек линии l в параметрическом виде задаются равенствами $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Координата z точки кривой l определяется из равенства $x - z + 2 = 0$, т. е. $z = x + 2 = R\cos t + 2$. Таким образом,

$$\left.\begin{array}{l} x = R\cos t; \\ l:\ y = R\sin t; \\ z = R\cos t + 2,\ t \in [0, 2\pi]; \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} dx = -R\sin t dt; \\ dy = R\cos t dt; \\ dz = -R\sin t dt. \end{cases}$$

Отсюда, согласно равенству (12.19), для интеграла (12.26) получаем

$$\int_l y\,dx + (x-z)\,dy + (x-y)\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-R^2 \sin^2 t - 2R\cos t - R^2(\cos t - \sin t)\sin t)\,dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} (2R\cos t + R^2 \cos t \sin t)\,dt = 0.$$

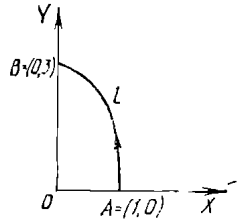


Рис. 12.3

Пример 6. Определить работу силы $\mathbf{a} = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (-x, y)$ при перемещении материальной точки вдоль линии l: $x^2 + y^2/9 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, от точки $A = (1, 0)$ до точки $B = (0, 3)$.

□ Кривая l представляет собой часть эллипса $x^2 + y^2/9 = 1$, расположенную в первом квадранте (рис. 12.3). Движение происходит против часовой стрелки. Так как параметрические уравнения эллипса $x = \cos t$, $y = 3\sin t$, $t \in [0, \pi/2]$, то по формуле (12.19) получаем

$$\int_l -x\,dx + y\,dy = \int_0^{\pi/2} (\cos t \sin t + 9\sin t \cos t)\,dt = 5\int_0^{\pi/2} \sin 2t\,dt = 5.$$

Свойства криволинейных интегралов второго рода. Перечислим основные свойства этих интегралов.

1°. (Линейность.) Если $\mathbf{a} = \mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2$, то для любых α и β из $\mathbf{R}$

$$\int_l (\alpha\mathbf{a}^1 + \beta\mathbf{a}^2, \vec{\tau}^0)\,dl = \alpha\int_l (\mathbf{a}^1, \vec{\tau}^0)\,dl + \beta\int_l (\mathbf{a}^2, \vec{\tau}^0)\,dl.$$

2°. (Аддитивность.) Если кривая l разбита на две части l_1 и l_2, то

$$\int_l (\mathbf{a}, \vec{\tau}^0)\,dl = \int_{l_1} (\mathbf{a}, \vec{\tau}^0)\,dl + \int_{l_2} (\mathbf{a}, \vec{\tau}^0)\,dl.$$

3°. Криволинейный интеграл второго рода по кривой l зависит от ее ориентации, т. е.

$$\int_{l^+} (\mathbf{a}, \vec{\tau}^0)\,dl = -\int_{l^-} (\mathbf{a}, \vec{\tau}^0)\,dl. \qquad (12.27)$$

Действительно, изменим ориентацию кривой l^+ на противоположную l^-. Так как вектор $\vec{\tau}(t)$, касательный к кривой, направлен в сторону возрастания параметра t, при изменении ориентации кривой он изменит свое направление на противоположное. При этом знак интегральной суммы (12.13) и предела (12.14) также изменится на противоположный.

12.2. ФОРМУЛА ГРИНА

Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Пусть V — область в $\mathbf{R}^3$ и $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — непрерывно дифференцируемые в V функции. Пусть

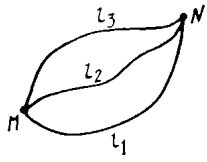


Рис. 12.4

Рис. 12.5

$l \in V$ — произвольная ориентированная кривая с начальной точкой M и конечной точкой N (рис. 12.4). Криволинейный интеграл

$$\int_l P dx + Q dy + R dz \tag{12.28}$$

в общем случае зависит не только от положения начальной и конечной точек пути интегрирования, но и от самого пути. Если же значение интеграла (12.28) одно и то же при любом выборе пути интегрирования l, соединяющего заданные начальную и конечную точки, то говорят, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

Если кривая l является замкнутой и ориентированной (рис. 12.5), соответствующий криволинейный интеграл второго рода обозначают

$$\oint_l P dx + Q dy + R dz.$$

Выражение $W = P dx + Q dy + R dz$ будем называть *дифференциальной формой*. Имеет место

Теорема 12.1. Пусть P, Q и R — функции, непрерывно дифференцируемые в односвязной области V. Тогда следующие четыре условия равносильны.

1. По любому замкнутому пути l, расположенному в V,

$$\oint_l P dx + Q dy + R dz = 0. \tag{12.29}$$

2. Интеграл (12.28) не зависит от пути интегрирования, т. е.

$$\int_{l_1} P dx + Q dy + R dz = \int_{l_2} P dx + Q dy + R dz, \tag{12.30}$$

где l_1, l_2 — произвольные пути, расположенные в V и имеющие общие начало и конец.

3. Существует непрерывно дифференцируемая функция $u = u(x, y, z)$, такая, что дифференциальная форма $W = P dx + Q dy + R dz$ является ее полным дифференциалом:

$$(du = P dx + Q dy + R dz) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} = P,\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q,\ \frac{\partial u}{\partial z} = R\right). \tag{12.31}$$

4. Для дифференциальной формы $W = P dx + Q dy + R dz$ выполнены следующие условия:

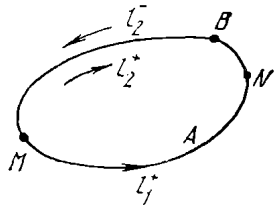


Рис. 12.6

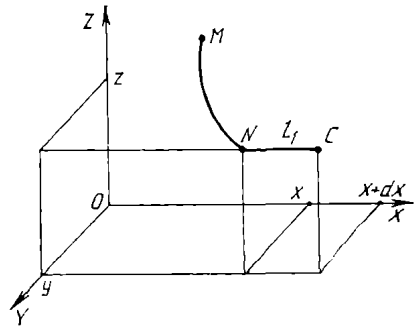


Рис. 12.7

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z};\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x};\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}, \tag{12.32}$$

называемые *условиями интегрируемости.*

□ Доказательство проведем по логической схеме $1\Rightarrow 2\Rightarrow 3\Rightarrow$ $\Rightarrow 4\Rightarrow 1$.

$1\Rightarrow 2$. Пусть выполнено равенство (12.29). На замкнутой кривой l возьмем две точки M и N, разбивающие ее на две дуги: $MAN=l_1^+$ и $NBM=l_2^-$ (рис. 12.6). Отсюда и из свойств 2° — 3° криволинейного интеграла второго рода будем иметь

$$\left(0=\oint_l=\int_{l_1^+}+\int_{l_2^-}=\int_{l_1^+}-\int_{l_2^+}\right)\Rightarrow\left(\int_{l_1^+}=\int_{l_2^+}\right)\Rightarrow\left(\int_{l_1}=\int_{l_2}\right).$$

$2\Rightarrow 3$. Предположим, что интеграл (12.28) не зависит от пути интегрирования. Тогда при фиксированной начальной точке $M=$ $=(x_0, y_0, z_0)$ этот интеграл является некоторой функцией $u(x, y, z)$ координат x, y, z конечной точки N, т. е.

$$u(x, y, z)=\int_{MN}P dx+Q dy+R dz\overset{(x, y, z)}{=\int_{(x_0, y_0, z_0)}}P dx+Q dy+R dz. \tag{12.33}$$

Покажем, что эта функция дифференцируема и существуют производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$, равные P, Q и R соответственно. Тем самым будет доказана справедливость соотношений (12.31).

Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x, y, z)-u(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Величина $u(x+\Delta x, y, z)-u(x, y, z)$ представляет собой интеграл от $P dx+Q dy+R dz$, взятый по пути, соединяющему точки $N=(x, y, z)$ и $C=(x+\Delta x, y, z)$. Так как по условию этот интеграл не зависит от пути интегрирования, выберем в качестве пути NC прямолинейный отрезок l_1, соединяющий эти точки (рис. 12.7). Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x,\ y,\ z) - u(x,\ y,\ z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{l_1} P dx + Q dy + R dz.$$

Так как на l_1 имеем $y = \text{const}$, $z = \text{const}$, то $dy = 0$ и $dz = 0$. Тем самым

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x}^{x+\Delta x} P(x,\ y,\ z)\, dx = \lim_{\Delta x \to 0} P(x + \theta \Delta x,\ y,\ z) = P(x,\ y,\ z)$$

(здесь использована теорема о среднем для интегралов, $0 < \theta < 1$). Таким же способом доказывается, что $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial u}{\partial z} = R$, т. е. соотношения (12.31) справедливы.

$3 \Rightarrow 4$. Пусть дифференциальная форма $W = Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y, z)$, т. е. выполнены равенства (12.31). Отсюда на основании равенства смешанных частных производных получаем:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x};\quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial R}{\partial x};\quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Q}{\partial z},$$

что и доказывает справедливость условий интегрируемости (12.32).

$4 \Rightarrow 1$. Пусть для дифференциальной формы $W = Pdx + Qdy + Rdz$ выполнены условия (12.32). Покажем, что в этом случае W является полным дифференциалом функции

$$u(x,\ y,\ z) = \int_{x_0}^{x} P(t,\ y_0,\ z_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,\ t,\ z_0)\, dt + \int_{z_0}^{z} R(x,\ y,\ t)\, dt, \tag{12.34}$$

т. е. $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ и $\frac{\partial u}{\partial z} = R$.

Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,\ y_0,\ z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x,\ t,\ z_0)}{\partial x}\, dt + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial R(x,\ y,\ t)}{\partial x}\, dt. \tag{12.35}$$

Но из условий (12.32) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$. Тогда равенство (12.35) перепишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,\ y_0,\ z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P(x,\ t,\ z_0)}{\partial t}\, dt + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial P(x,\ y,\ t)}{\partial t}\, dt$$

(здесь учтено, что в первом интеграле справа $y = t$, а во втором — $z = t$). Интегрируя полученное выражение, находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,\ y_0,\ z_0) + P(x,\ y,\ z_0) - P(x,\ y_0,\ z_0) + P(x,\ y,\ z) -$$

$$- P(x,\ y,\ z_0) = P(x,\ y,\ z).$$

Аналогично доказываются равенства $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial u}{\partial z} = R$.

Итак, существует функция u, такая, что $du = W = Pdx + Qdy + Rdz$. В этом случае для любого пути l: $\{x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ z \in [\alpha, \beta]\}$, с начальной точкой $M = (x(\alpha),\ y(\alpha),\ z(\alpha))$ и конечной точкой $N = (x(\beta),\ y(\beta),\ z(\beta))$ будем иметь

$$\int_l P dx + Q dy + R dz = \int_l \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta du\,(x(t),\ y(t),\ z(t))\,dt = u(x(t),\ y(t),\ z(t))\Big|_\alpha^\beta = u(N) - u(M). \tag{12.36}$$

Если же путь l замкнут, то точки M и N совпадают, значит, выполнено равенство (12.29). ■

Восстановление функции по ее полному дифференциалу. Итак, при выполнении условий теоремы 12.1 дифференциальная форма $W = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$ является полным дифференциалом функции $u = u(x, y, z)$, которая может быть найдена по формуле (12.34), где $M = (x_0, y_0, z_0)$ — произвольная фиксированная точка, а $N = (x, y, z)$ — переменная точка области V. Так как две функции, имеющие один и тот же дифференциал, отличаются друг от друга на постоянную величину C, то, следовательно, формула

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz + C \tag{12.37}$$

определяет искомую функцию u по ее полному дифференциалу $du = Pdx + Qdy + Rdz$.

Так как интеграл (12.37) не зависит от пути интегрирования, то в качестве его можно взять ломаную $MABN$, составленную из отрезков, параллельных координатным осям (рис. 12.8). При этом выборе пути равенство (12.37) приобретает вид

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)\,dt + C. \tag{12.38}$$

В частности, если область V выпукла и содержит начало координат, то за точку M можно принять начало координат (0, 0, 0), а за путь l — прямолинейный отрезок ON, параметрические уравнения которого $x = tX$,

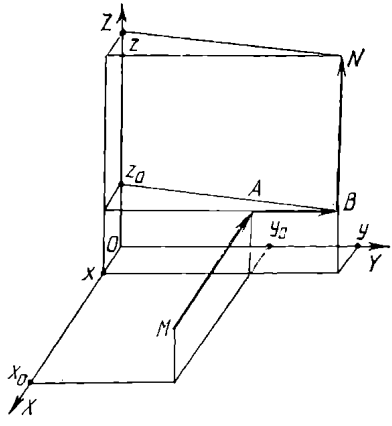


Рис. 12.8

$y = tY$, $z = tZ$, $t \in [0, 1]$, где X, Y, Z — координаты точки N. Тогда по формуле (12.37), согласно равенству (12.19), получим

$$u(x, y, z) = \int_0^1 (P(tx, ty, tz)\, x + Q(tx, ty, tz)\, y + R(tx, ty, tz)\, z)\, dt + C \qquad (12.39)$$

(здесь переменные X, Y, Z заменены на x, y, и z соответственно).

Полученные выше результаты сформулируем для случая функций двух переменных.

Пусть $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ — гладкие в односвязной области D функции. Тогда при выполнении условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad (12.40)$$

дифференциальная форма $W = Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом в D некоторой функции $u(x, y)$. Эта функция может быть определена по формуле

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy + C \qquad (12.41)$$

или, согласно равенству (12.38), по формуле

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\, dt + C, \qquad (12.42)$$

где (x_0, y_0) — фиксированная точка; (x, y) — переменная точка области D.

В частности, если D — выпуклая область, содержащая точку $(0, 0)$, то

$$u(x, y) = \int_0^1 (P(tx, ty)\, x + Q(tx, ty)\, y)\, dt + C. \qquad (12.43)$$

Пример 1. Восстановить функцию $u(x, y)$, если $du = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy$.

□ Имеем $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $Q = \frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, т. е. условие (12.40) выполнено. Возьмем в качестве точки (x_0, y_0) точку $M = (1, 1)$. Тогда по формуле (12.42)

$$u(x, y) = \int_1^x \left(\frac{1}{t} + 1\right)dt + \int_1^y \left(\frac{2}{t} - \frac{x}{t^2}\right)dt + C =$$

$$= (\ln|t| + t)\Big|_1^x + \left(2\ln|t| + \frac{x}{t}\right)\Big|_{t=1}^{t=y} + C = \ln|x| + 2\ln|y| + \frac{x}{y} - 1 + C.$$

Пример 2. Восстановить функцию u по ее полному дифференциалу $W = (2xy + 3z^2)\, dx + x^2 dy + 6xzdz$.

□ Имеем: $P = 2xy + 3z^2$, $Q = x^2$, $R = 6xz$. Легко убедиться, что равенства (12.32) выполняются. Тогда, согласно формуле (12.39),

$$u(x, y, z) = \int_0^1 ((2txty + 3t^2z^2)x + t^2x^2y + 6txtzz)\,dt + C =$$

$$= \int_0^1 (2x^2y + 3xz^2 + x^2y + 6xz^2)\,t^2dt = x^2y + 3xz^2 + C.$$

При нахождении функции u по ее полному дифференциалу $du = Pdx + Qdy$ часто поступают следующим образом. Из равенства $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ имеем $u = \int P(x, y)\,dx + g(y)$, где $g(y)$ — некоторая дифференцируемая функция. Дифференцируя это равенство по y, согласно условию $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int \frac{\partial P(xy)}{\partial y}\,dx + g'(y) = Q(x, y).$$

Отсюда находим функцию

$$g(y) = \int \left(Q(x, y) - \int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\right) dy + C.$$

Таким образом,

$$u = \int P(x, y)\,dx + \int \left(Q(x, y) - \int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\right) dy + C.$$

Пример 3. Найти функцию $u(x, y)$ по ее полному дифференциалу $du = e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})\,dy$.

□ В данном случае $P = e^{-y}$, $Q = 1 - xe^{-y}$. Имеем $\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, т. е. условие (12.40) выполнено. В таком случае существует функция $u(x, y)$, такая, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y};\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 - xe^{-y}.$$

Интегрируя первое уравнение по x, находим $u = \int e^{-y}dx + g(y) = xe^{-y} + g(y)$. Отсюда $\frac{\partial u}{\partial y} = -xe^{-y} + g'(y) = 1 - xe^{-y}$, т. е. $g'(y) = 1$.

Следовательно, $g(y) = y + C$. Тогда искомая функция $u(x, y) = xe^{-y} + g(y) = xe^{-y} + y + C$.

Формула Грина*. Формула Грина связывает криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой с двойным интегралом по области, ограниченной этой кривой.

Пусть в плоскости XY задана замкнутая область D с границей Г. Будем говорить, что *граница* Г *области* D *ориентирована положительно (отрицательно)*, если при движении по Г область

* Дж. Грин (1793—1841) — английский математик.

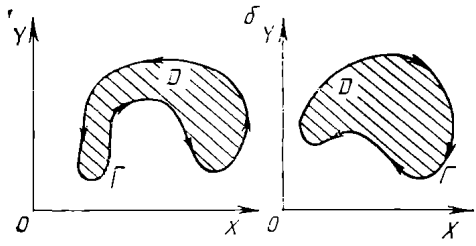


Рис. 12.9

D располагается с левой (правой) стороны (рис. 12.9, *а*, *б* соответственно). Говорят, что *область D ориентирована положительно (отрицательно)*, если ее граница Γ ориентирована положительно (отрицательно).

Назовем область D *областью первого типа*, если она ограничена снизу кривой $\Gamma_1 : y = y_1(x)$, сверху — кривой $\Gamma_2 : y = y_2(x)$ и, возможно, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, причем любая прямая, параллельная оси Y, пересекает границы Γ_1 и Γ_2 не более чем в двух точках (рис. 12.10, *а*).

Аналогично *областью второго типа* называется область, ограниченная слева кривой Γ_1: $x = x_1(y)$, справа — кривой Γ_2: $x = x_2(y)$ и, может быть, отрезками прямых $y = c$ и $y = d$, причем любая прямая, параллельная оси X, пересекает границы Γ_1 и Γ_2 не более чем в двух точках (рис. 12.10, *б*).

Имеет место

Теорема 12.2 (Грина). Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой односвязной области D, ограниченной кусочно-гладкой кривой Γ. Тогда

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \qquad (12.44)$$

где криволинейный интеграл вычисляется по границе Γ области D, ориентированной положительно. Выражение (12.44) называется *формулой Грина*.

□ Рассмотрим сначала случай, когда D — область первого типа (см. рис. 12.10, *а*), т. е. $D = \{a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$. Преобразуем двойной интеграл $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ в криволинейный по границе Γ области D. Имеем

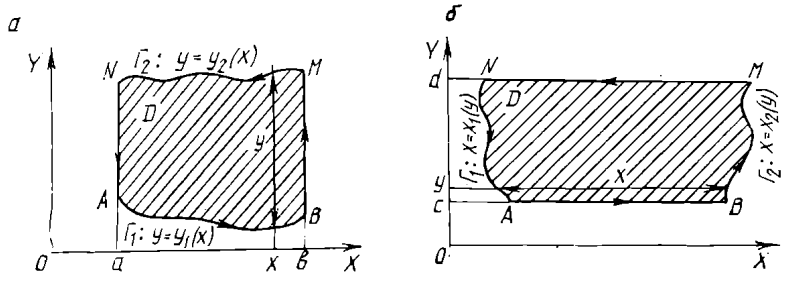


Рис. 12.10

$$\iint\limits_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dy = \int\limits_a^b P(x, y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx =$$

$$= \int\limits_a^b (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)))\, dx = \int\limits_a^b P(x, y_2(x))\, dx -$$

$$- \int\limits_a^b P(x, y_1(x))\, dx.$$

Первый из двух интегралов представляет собой (при указанном на рис. 12.10, *а* направлении обхода границы) криволинейный интеграл $-\int\limits_{\Gamma_2} P(x, y)\, dx$, а второй — криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma_1} P(x, y)\, dx$. Тем самым

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = -\int\limits_{\Gamma_1} P(x, y)\, dx - \int\limits_{\Gamma_2} P(x, y)\, dx.$$

Так как для отрезков BM и NA $dx = 0$, то

$$\int\limits_{BM} P(x, y)\, dx = \int\limits_{NA} P(x, y)\, dx = 0.$$

Поэтому, добавив эти два равные нулю интеграла в правую часть предыдущего равенства, получим

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = -\int\limits_{\Gamma_1} Pdx - \int\limits_{BM} Pdx - \int\limits_{\Gamma_2} Pdx - \int\limits_{NA} Pdx = -\oint\limits_{\Gamma} Pdx, \tag{12.45}$$

где Γ — граница области D, ориентированная положительно.

Если D — область второго типа (см. рис. 12.10, *б*), то аналогично выводится формула

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy = \oint\limits_{\Gamma} Qdy. \tag{12.46}$$

В общем случае будем рассматривать области, которые можно разбить на конечное число областей как первого, так и второго типа. Рассмотрим, например, разбиение области D на части D_i,

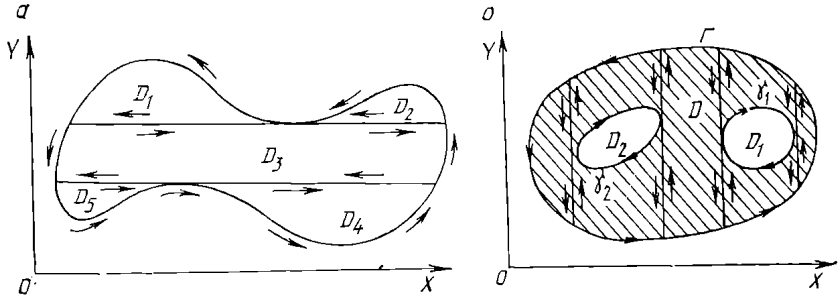


Рис. 12.11

$i = 1, 2, \ldots, n$, второго типа (рис. 12.11, *а*). Для каждой части D_i справедливо равенство (12.46), т. е.

$$\iint\limits_{D_i} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy = \oint\limits_{\Gamma_i} Q dy,$$

где Γ_i — контур, ограничивающий область D_i.

Суммируя такие равенства по всем i, слева получаем двойной интеграл по области $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$, а справа — криволинейный интеграл по границе Γ этой области. При этом криволинейные интегралы вдоль внутренних контуров отрезков прямых взаимно уничтожаются, так как по каждому из них интеграл берется дважды в противоположных направлениях.

Таким образом, для области D справедливо равенство (12.46).

Если область D разбить на области D_i первого типа, то, рассуждая аналогично, получаем, что для нее также справедливо равенство (12.45). Вычитая теперь равенство (12.45) из (12.46), получаем формулу Грина (12.44). ■

Если область D — многосвязная и Γ — ее внешний контур, а γ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — внутренние контуры (рис. 12.11, *б*), то для такой области формула Грина имеет вид

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_{\Gamma} P dx + Q dy - \sum_{i=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_i} P dx + Q dy.$$

Справедливость ее следует из того, что при разбиении области D на части D_i вертикальными или горизонтальными отрезками криволинейные интегралы по ним дважды берутся в противоположных направлениях и поэтому взаимно уничтожаются. Знак «минус» перед суммой означает, что контуры γ_i при положительной ориентации области D ориентированы отрицательно (см. рис. 12.11, *б*).

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \oint\limits_{l} -x^2 y dx + xy^2 dy$, где l — окружность $x^2 + y^2 = R^2$, пробегаемая против часовой стрелки.

□ Имеем $P = -x^2 y$, $Q = xy^2$. Область D, ограниченная окружностью, есть круг $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. Так как $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2$, то по формуле Грина

$$I = \oint\limits_{l} -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint\limits_{D} (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

Перейдя в этом двойном интеграле к полярным координатам, найдем, что

$$I = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Рассмотрим пример, показывающий, что требования непрерывности функций P и Q и частных производных P'_y, Q'_x существенны.

Пусть $I = \oint\limits_{\Gamma} \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где Γ — контур, охватывающий точку $(0, 0)$. Здесь $P = x/(x^2 + y^2)$, $Q = -y/(x^2 + y^2)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Формальное применение формулы Грина дает $I = \iint\limits_{D} 0 dxdy = 0$, где D — область, ограниченная контуром Γ. Однако интеграл I, взятый по замкнутому контуру Γ, не равен вообще говоря нулю. Например, если Γ — окружность: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, то

$$I = \oint\limits_{x^2+y^2=1} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Интеграл $I \neq 0$, так как функции P и Q не являются непрерывными в точке $(0, 0)$ из D.

Вычисление площади с помощью формулы Грина. Полагая в формуле (12.44) $P = -y$, $Q = x$, получаем

$$\oint\limits_{\Gamma} -ydx + xdy = \iint\limits_{D} 2dxdy = 2\iint\limits_{D} dxdy = 2S,$$

где S — площадь области D. Отсюда

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_{\Gamma} xdy - ydx. \tag{12.47}$$

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

□ Из уравнений кривой имеем $dx = -3a\cos^2 t \sin t dt$, $dy = 3a\sin^2 t \cos t dt$. По формуле (12.47),

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} (3a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 3a^2 \sin^4 t \cos^2 t)\, dt =$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8} a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2t dt =$$

$$= \frac{3}{16} a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 4t)\, dt = \frac{3}{16} a^2 \left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

Пример 6. Вычислить площадь области D, ограниченной параболами $y^2 = x$, $x^2 = y$ (рис. 12.12).

□ Воспользуемся формулой (12.47) (направление обхода контура показано на рис. 12.12). Вычислим интеграл $\int\limits_{\Gamma_1} -ydx + xdy$ по кривой Γ_1: $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$\int\limits_{\Gamma_1} -ydx + xdy = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

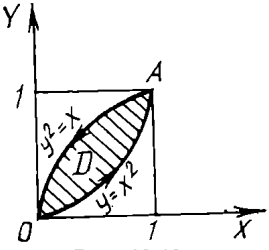


Рис. 12.12

Этот же интеграл по кривой Γ_2: $x = y^2$, $y \in [1, 0]$.

$$\int_{\Gamma_2} -ydx + xdy = -\int_1^0 y^2 dy = \frac{1}{3}.$$

Тогда при $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

$$S = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -ydx + xdy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

12.3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определение и вычисление поверхностного интеграла первого рода. Пусть S — гладкая поверхность в пространстве $\mathbf{R}^3$ и $f(x, y, z)$ — непрерывная в точках этой поверхности функция. С помощью кусочно-гладких линий разобьем поверхность S на части S_i, площадь каждой из которых равна Δs_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. В каждой части S_i произвольно выберем точку $M_i = (x_i, y_i, z_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i z_i)\, \Delta s_i. \tag{12.48}$$

Обозначим через Δ максимальный из диаметров частей S_i. Если существует предел интегральных сумм (12.48), не зависящий ни от способа разбиения поверхности S на части S_i, ни от выбора точек $(x_i, y_i, z_i) \in S_i$, то он называется *поверхностным интегралом первого рода от функции* $f(x, y, z)$ *по поверхности* S и обозначается $\iint_S f(x, y, z)\, ds$.

Таким образом, по определению,

$$\iint_S f(x, y, z)\, ds = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta s_i. \tag{12.49}$$

Пусть поверхность S задана явно уравнением $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, где D — проекция S на плоскость XY (рис. 12.13). Тогда функция $f(x, y, z)$ в точках этой поверхности имеет вид $f(x, y, g(x, y))$. Поскольку в этом случае дифференциал площади поверхности $ds = \sqrt{1 + g_x'^2 + g_y'^2}\, dxdy \approx \Delta s$, то из равенства (12.49) после несложных рассуждений получим *формулу вычисления поверхностного интеграла в случае явного задания поверхности* S:

$$\iint_S f(x, y, z)\, ds = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + g_x'^2 + g_y'^2}\, dxdy. \tag{12.50}$$

Если поверхность S задана параметрически: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in W$, то функция $f(x, y, z)$ в точках S имеет вид $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. В этом случае

$$\Delta s \approx ds = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv =$$

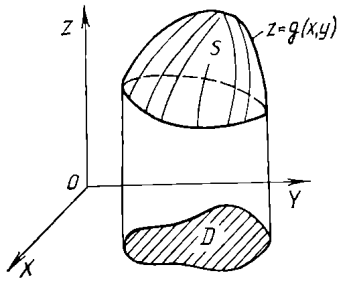


Рис. 12.13

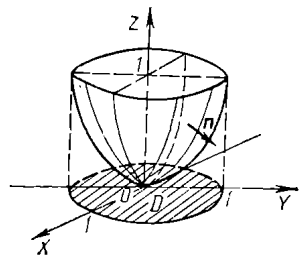


Рис. 12.14

$$= \sqrt{\left|\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right|^2 + \left|\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right|^2 + \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|^2}\, dudv.$$

Из равенства (12.49) получим

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, ds = \iint\limits_W f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv. \tag{12.51}$$

Пусть поверхность S задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$ и $F'_z \neq 0$, $\forall (x, y, z) \in S$. В этом случае равенство $F(x, y, z) = 0$ определяет единственную неявную функцию $z = g(x, y)$, для которой $g'_x = -F'_x/F'_z$, $g'_y = -F'_y/F'_z$. Тогда формула (12.50) примет вид

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, ds = \iint\limits_D f(x, y, z)\, \frac{1}{|F'_z|}\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}\, dxdy, \tag{12.52}$$

где D — проекция поверхности на плоскость XY.

Заметим, что при вычислении интеграла в правой части равенства (12.52) необходимо z выразить из уравнения поверхности $F(x, y, z) = 0$.

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \iint\limits_S ds$, где S — часть поверхности $z = x^2 + y^2$, расположенная между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$ (рис. 12.14).

□ Так как в точках поверхности $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$, по формуле (12.50) получим

$$I = \iint\limits_S ds = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy.$$

Перейдя в двойном интеграле к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, будем иметь

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho d\rho = \frac{\pi}{4}\int\limits_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\, d(1 + 4\rho^2) =$$

$$= \frac{\pi}{6}\sqrt{(1 + 4\rho^2)^3}\Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}\,\pi.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, где S — часть конической поверхности $x^2+y^2-z^2=0$, заключенная между плоскостями $z=0$ и $z=1$.

□ Поверхность S задана неявно уравнением $F(x, y, z)=x^2+y^2-z^2=0$. Ее проекцией на плоскость XY служит круг $x^2+y^2\leqslant 1$. Так как $F'_x=2x$, $F'_y=2y$, $F'_z=-2z$ и для конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, по формуле (12.52)

$$\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,ds=\iint\limits_D \frac{1}{2z}\sqrt{x^2+y^2}\cdot 2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdy=$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 \rho^2 d\rho=\frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3}.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,ds$, где S — верхняя половина сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

□ Зададим верхнюю полусферу параметрически (θ и φ — параметры): $x=a\sin\theta\cos\varphi$, $y=a\sin\theta\sin\varphi$, $z=a\cos\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Так как $ds=a^2\sin\theta d\theta d\varphi$ [см. формулу (11.71)], по формуле (12.51) получаем

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)\,ds=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}a^4\sin^3\theta d\theta=-2\pi a^4\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\,d\cos\theta=$$

$$=-2\pi a^4\left(\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{4}{3}\pi a^4.$$

Свойства поверхностного интеграла первого рода. Поверхностный интеграл первого рода обладает следующими свойствами.

1°. (Линейность.) Пусть $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ — функции, непрерывные в точках поверхности S. Тогда

$$\iint\limits_S (c_1 f_1(x, y, z)+c_2 f_2(x, y, z))\,ds=$$

$$=c_1\iint\limits_S f_1(x, y, z)\,ds+c_2\iint\limits_S f_2(x, y, z)\,ds,$$

где c_1, c_2 — произвольные числа.

2°. (Аддитивность.) Если кусочно-гладкая поверхность S состоит из конечного числа гладких непересекающихся поверхностей, т. е. $S=\bigcup\limits_k S_k$, $k=1, 2, \ldots, n$, то

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,ds=\sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{S_k} f(x, y, z)\,ds. \qquad (12.53)$$

3°. $\iint\limits_S ds=P$, где P — площадь поверхности S.

4°. (Оценка модуля интеграла.) Справедливо неравенство

$$\left|\iint\limits_S f(x, y, z)\,ds\right|\leqslant\iint\limits_S |f(x, y, z)|\,ds\leqslant MP,$$

где $M=\max\limits_{(x, y, z)\in S}|f(x, y, z)|$; P — площадь поверхности S.

5°. (Теорема о среднем.) Если функция f непрерывна в точках поверхности S, то на этой поверхности существует точка M_0, такая, что

$$\iint_S f(x,\ y,\ z)\,ds = f(M_0)\,P,$$

где P — площадь поверхности S.

Некоторые приложения поверхностных интегралов первого рода. Пусть по гладкой поверхности S непрерывно распределена масса поверхностной плотностью $\mu(x,\ y,\ z)$. Тогда интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} \mu(x_i,\ y_i,\ z_i)\,\Delta s_i$ приближенно равна массе поверхности. Интеграл

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i,\ y_i,\ z_i)\,\Delta s_i = \iint_S \mu(x,\ y,\ z)\,ds = m \qquad (12.54)$$

определяет точное значение массы m поверхности S.

Координаты центра тяжести поверхности S определяются соотношениями:

$$x_c = M_x/m;\ y_c = M_y/m;\ z_c = M_z/m, \qquad (12.55)$$

где

$$M_x = \iint_S x\mu(x,\ y,\ z)\,ds;\ M_y = \iint_S y\mu(x,\ y,\ z)\,ds;$$

$$M_z = \iint_S z\mu(x,\ y,\ z)\,ds \qquad (12.56)$$

есть статические моменты поверхности S относительно плоскостей $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ соответственно.

Моменты инерции поверхности S относительно координатных осей X, Y и Z выражаются соответственно интегралами

$$I_X = \iint_S (y^2 + z^2)\,\mu(x,\ y,\ z)\,ds;\ I_Y = \iint_S (x^2 + z^2)\,\mu(x,\ y,\ z)\,ds;$$

$$I_Z = \iint_S (x^2 + y^2)\,\mu(x,\ y,\ z)\,ds. \qquad (12.57)$$

Пример 4. Вычислить координаты центра тяжести плоскости $z = x$, ограниченной плоскостями $x + y = 1$, $y = 0$, $x = 0$ (рис. 12.15), если поверхностная плотность $\mu = 1$.

□ Для поверхности $z = x$ имеем $z'_x = 1$, $z'_y = 0$. Тогда масса поверхности

$$m = \iint_S 1\,ds = \iint_D \sqrt{2}\,dx\,dy =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

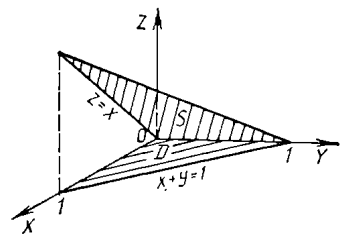


Рис. 12.15

По формулам (12.56) находим статические моменты:

$$M_x = \iint\limits_S xds = \sqrt{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} xdy = \frac{\sqrt{2}}{6};$$

$$M_y = \iint\limits_S yds = \sqrt{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} ydy = \frac{\sqrt{2}}{6};$$

$$M_z = \iint\limits_S zds = \sqrt{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} xdy = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

В итоге, согласно равенствам (12.55), получаем $(x_c, y_c, z_c) = (1/3, 1/3, 1/3)$.

Ориентация поверхности. Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ задана гладкая поверхность S. Возьмем на ней некоторую внутреннюю точку M и проведем через нее вектор нормали к S. Окружим точку M замкнутым контуром Γ с выбранным на нем направлением обхода (рис. 12.16). Поверхность S, в каждой точке которой указаны нормальный вектор $\mathbf{n}$ и направление обхода по контуру Γ, называется *ориентированной*.

Сторона поверхности, из каждой точки которой восстанавливается вектор нормали, называется *положительной* или *внешней*. Другая сторона поверхности, обращенная в сторону вектора $-\mathbf{n}$, называется *отрицательной* или *внутренней* стороной поверхности S.

Поверхности, у которых различают положительные и отрицательные стороны, называются *двухсторонними*. К ним относятся плоскость, сфера, конус и т. д. Двухсторонние поверхности характеризуются тем, что если вектор нормали $\mathbf{n}$ перемещать непрерывно по любому замкнутому контуру L, лежащему на поверхности, он всегда возвращается в исходную точку с первоначальным направлением (рис. 12.16).

Существуют поверхности, не являющиеся двухсторонними. Классическим примером односторонней поверхности является *лист Мёбиуса** (рис. 12.17). Его можно получить, если взять длинную полоску бумаги и, повернув один конец ее на 180°, склеить с

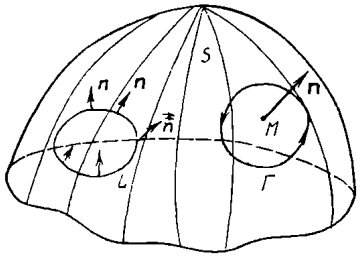


Рис. 12.16

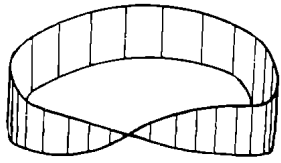


Рис. 12.17

* А. Ф. Мёбиус (1790—1868) — немецкий математик.

другим концом. При обходе листа Мёбиуса по его средней линии вектор нормали возвращается в исходную точку с направлением, противоположным первоначальному, т. е. лист Мёбиуса — *односторонняя поверхность.*

Нормаль к поверхности. Пусть поверхность S задана параметрически: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in W$. В § 11.3 получено, что вектор нормали $\mathbf{n}$ к поверхности определяется формулой (11.68) и имеет вид

$$\mathbf{n} = [\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v] = (A, B, C) = \left(\left|\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right|, \left|\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right|, \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|\right), \tag{12.58}$$

где

$$\vec{\tau}_u = (x'_u, y'_u, z'_u); \quad \vec{\tau}_v = (x'_v, y'_v, z'_v) \tag{12.59}$$

есть векторы, направленные по касательным к поверхности. Нормируя вектор $\mathbf{n}$, получаем единичный вектор нормали

$$\mathbf{n}^0 = \mathbf{n}/|\mathbf{n}| = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \tag{12.60}$$

где α, β, γ — углы между вектором $\mathbf{n}$ и осями X, Y и Z соответственно.

Направляющие косинусы вектора $\mathbf{n}$ определяются соотношениями:

$$\cos\alpha = A/|\mathbf{n}|; \quad \cos\beta = B/|\mathbf{n}|, \quad \cos\gamma = C/|\mathbf{n}|, \tag{12.61}$$

где $|\mathbf{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

Если поверхность S задана явно в виде $z = f(x, y)$, то в этом случае вектор нормали, согласно равенству (11.73),

$$\mathbf{n} = (-f'_x, \ -f'_y, \ 1). \tag{12.62}$$

Нормируя его, находим единичный вектор нормали:

$$\mathbf{n}^0 = (-f'_x/|\mathbf{n}|, \ -f'_y/|\mathbf{n}|, \ 1/|\mathbf{n}|) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\varphi), \tag{12.63}$$

где $|\mathbf{n}| = \sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1}$.

Пусть теперь поверхность S задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$. Если $F'_z \neq 0$, $\forall (x, y, z) \in S$, то равенство $F(x, y, z) = 0$ определяет неявно функцию $z = f(x, y)$, частные производные которой имеют вид $f'_x = -F'_x/F'_z$, $f'_y = -F'_y/F'_z$. Подставив их в формулу (12.62), получим вектор нормали

$$\mathbf{n} = \frac{1}{F'_z}(F'_x, F'_y, F'_z) = \frac{\operatorname{grad} F}{F'_z}. \tag{12.64}$$

Единичный же вектор нормали в этом случае

$$\mathbf{n}^0 = \pm \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}. \tag{12.65}$$

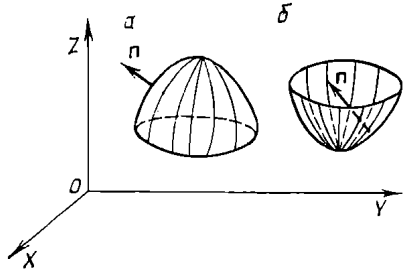


Рис. 12.18

При выборе единичного вектора нормали необходимо следить за тем, чтобы получилась нормаль нужного направления, т. е. правильно выбирать нужную сторону поверхности. На рис. 12.18, *а,б* вектор нормали $\mathbf{n}$ определяет положительную сторону поверхности. Для этого вектора $\cos\gamma > 0$, т. е. он составляет острый угол с осью Z.

Если для поверхности $z = f(x, y)$ указано, что нормаль к ней составляет с осью Z угол $\gamma > \pi/2$, то в этом случае

$$\mathbf{n} = (f'_x,\ f'_y,\ -1). \tag{12.66}$$

Аналогично для поверхности $F(x, y, z) = 0$, у вектора нормали которой $\cos\gamma > \pi/2$, следует писать

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{F'_z}(F'_x,\ F'_y,\ F'_z) = -\frac{\operatorname{grad} F}{F'_z}, \tag{12.67}$$

и, значит, в этом случае $\mathbf{n}^0 = -\dfrac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}$.

Определение поверхностных интегралов второго рода. Пусть в области V пространства $\mathbf{R}^3$ определена вектор-функция

$$\mathbf{a} = (P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}, \tag{12.68}$$

где P, Q, R — непрерывные в V функции.

Предположим, что в V задана гладкая поверхность S с выбранной на ней ориентацией. Пусть $\mathbf{n}^0 = \mathbf{n}^0(x, y, z)$ — единичный вектор нормали к S в точке $M = (x, y, z) \in S$. Разобьем поверхность S на части S_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ и выберем в каждой части произвольно точку (x_i, y_i, z_i). Составим интегральную сумму:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}(x_i, y_i, z_i),\ \mathbf{n}^0(x_i, y_i, z_i))\,\Delta s_i,$$

где Δs_i — площадь части S_i.

Обозначим через Δ наибольший из диаметров частей S_i. Если при $\Delta \to 0$ существует предел интегральных сумм σ_n, не зависящий ни от способа разбиения поверхности S на части S_i, ни от выбора точек $(x_i, y_i, z_i) \in S_i$, то его называют *поверхностным интегралом второго рода от функции* $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ *по поверхности* S и обозначают $\iint\limits_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\,ds$.

Таким образом, по определению,

$$\iint\limits_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\,ds = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}(x_i, y_i, z_i),\ \mathbf{n}^0(x_i, y_i, z_i))\,\Delta s_i. \tag{12.69}$$

Вычисление поверхностных интегралов второго рода. Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ задана поверхность S и D — ее проекция на плоскость XY. Тогда из определения (12.69) поверхностного интеграла второго рода и равенства $ds = |\mathbf{n}|\,dxdy \approx \Delta s$ можно получить формулу

$$\iint\limits_S (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,ds = \iint\limits_D (\mathbf{a},\ \mathbf{n})\,dxdy, \tag{12.70}$$

где $\mathbf{n}$ — выбранная нормаль к поверхности.

Если поверхность S задана параметрически: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in W$, то, согласно равенству (12.58) и соотношению (12.69),

$$\iint\limits_S (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,ds = \iint\limits_W (\mathbf{a},\ \mathbf{n})\,dudv =$$

$$= \iint\limits_W \left(P\left|\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right| + Q\left|\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right| + R\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|\right) dudv. \tag{12.71}$$

Так как

$$\left|\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right| dudv = dydz;\quad \left|\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right| dudv = dzdx;$$

$$\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| dudv = dxdy,$$

формулу (12.71) можно представить в виде

$$\iint\limits_S (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,ds = \iint\limits_S P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

Поскольку $(\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$, последнее равенство можно представить в виде

$$\iint\limits_S (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,ds = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds =$$

$$= \iint\limits_S P dydz + Q dzdx + R dxdy. \tag{12.72}$$

Формула (12.72) устанавливает *связь между поверхностными интегралами первого и второго рода.*

Из формул (12.70) и (12.72) получаем равенство

$$\iint\limits_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint\limits_D (\mathbf{a},\ \mathbf{n})\,dxdy, \tag{12.73}$$

где D — проекция поверхности S на плоскость XY.

Пример 5. Вычислить интеграл $I = \iint\limits_S z dydz - 4y dzdx + 8x^2 dxdy$, где S — часть поверхности $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 1$. Внешняя нормаль указана на рис. 12.14.

□ В данном случае $P = z$, $Q = -4y$, $R = 8x^2$, т. е. $\mathbf{a} = (z, -4y, 8x^2)$. Вектор внешней нормали имеет вид (12.66), так как он составляет тупой угол с осью Z. В силу этого $\mathbf{n} = (f_x', f_y', -1) = (2x, 2y, -1)$ и по формуле (12.73) находим

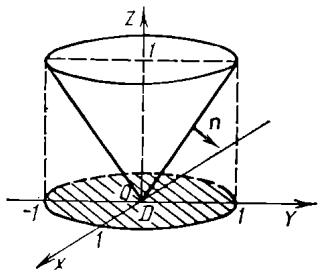


Рис. 12.19

$$I=\iint\limits_D (\mathbf{a},\ \mathbf{n})\,dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(z\cdot 2x)-8y^2-$$

$$-8x^2)\,dxdy=-2\iint\limits_D (x^2+y^2)(4-x)\,dxdy.$$

Перейдя в этом интеграле к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$, получим

$$I=-2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 \rho^3(4-\rho\cos\varphi)\,d\rho=$$

$$=-2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\frac{\cos\varphi}{5}\right)d\varphi=-4\pi.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $I=\iint\limits_S (x+y)\,dydz+(y-x)dzdx+(z-2)dxdy$, где S — часть конуса $x^2+y^2-z^2=0$, $z\geqslant 0$, отсекаемая плоскостью $z=1$ (нормаль указана на рис. 12.19).

□ Поверхность S задана неявно уравнением $F=x^2+y^2-z^2=0$. Согласно равенству (12.67), вектор нормали к S имеет вид

$$\mathbf{n}=\frac{1}{-F_z'}\left(F_x',\ F_y',\ F_z'\right)=-\frac{1}{2z}(2x,\ 2y,\ -2z)=\frac{1}{z}(x,\ y,\ -z).$$

По формуле (12.73)

$$I=\iint\limits_S (x+y)\,dydz+(y-x)\,dzdx+(z-2)\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_D\frac{1}{z}(x(x+y)+y(y-x)-z(z-2))\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_D\frac{1}{z}(x^2+y^2-z^2+2z)\,dxdy.$$

Подставив в это выражение z из уравнения поверхности $x^2+y^2-z=0$, получим $I=2\iint\limits_D dxdy=2\pi$, где π — площадь круга $x^2+y^2\leqslant 1$.

Пример 7. Вычислить интеграл

$$I=\iint\limits_S xdydz+(y+z)\,dzdx+(z-y)\,dxdy, \tag{12.74}$$

где S — внешняя сторона верхней полусферы $x^2+y^2+z^2=9$.

□ Запишем поверхность полусферы параметрически: $x=3\sin\theta\cos\varphi$, $y=3\sin\theta\sin\varphi$, $z=3\cos\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Так как

$$\left|\frac{D(y,\ z)}{D(\theta,\ \varphi)}\right|=9\sin^2\theta\cos\varphi;\quad\left|\frac{D(z,\ x)}{D(\theta,\ \varphi)}\right|=9\sin^2\theta\sin\varphi;\quad\left|\frac{D(x,\ y)}{D(\theta,\ \varphi)}\right|=9\cos\theta\sin\theta,$$

по формуле (12.71) для интеграла (12.74) получим

$$I=\iint\limits_S xdydz+(y+z)\,dzdx+(z-y)\,dxdy=$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} (3\sin\theta\cos\varphi \cdot 9\sin^2\theta\cos\varphi + (3\sin\theta\sin\varphi + 3\cos\theta)\, 9\sin^2\theta\sin\varphi +$$

$$+ (3\cos\theta - 3\sin\theta\sin\varphi)\, 9\cos\theta\sin\theta)\, d\theta =$$

$$= 27\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} (\sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta)\, d\theta = 27\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = 54\pi.$$

Свойства поверхностного интеграла второго рода. Перечислим свойства таких интегралов.

1°. Если $\mathbf{a} = \mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2$, то

$$\iint_S (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\, ds = \iint_S (\mathbf{a}^1,\ \mathbf{n}^0)\, ds + \iint_S (\mathbf{a}^2,\ \mathbf{n}^0)\, ds.$$

2°. $\iint_S (\alpha\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\, ds = \alpha\iint_S (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\, ds,\ \forall\alpha\in R.$

3°. Если на поверхности S поменять ориентацию на противоположную, знак интеграла $\iint_S (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\, ds$ изменится на противоположный:

$$\iint_{S^+} (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\, ds = -\iint_{S^-} (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\, ds. \tag{12.75}$$

Интеграл слева вычисляется по положительной стороне поверхности S, а интеграл справа — по отрицательной. Действительно, если $\mathbf{n}^0$ — вектор нормали на положительно ориентированной стороне поверхности S, то $-\mathbf{n}^0$ — вектор нормали по отрицательно ориентированной стороне.

4°. Если кусочно-гладкая поверхность S разбита на конечное число непересекающихся поверхностей S_k, т. е. $S = \bigcup_{k=1}^{n} S_k$,

$$\iint_S (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\, ds = \sum_{k=1}^{n} \iint_{S_k} (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\, ds. \tag{12.76}$$

5°. (Оценка модуля интеграла.) Имеет место оценка модуля поверхностного интеграла второго рода:

$$\left|\iint_S (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\, ds\right| \leqslant \iint_S |(\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)|\, ds \leqslant \max_{(x,\,y,\,z)\in S} |\mathbf{a}(x,\ y,\ z)|\, P,$$

где P — площадь поверхности S.

Пример 8. Вычислить интеграл $I = \iint_S x dydz + z^3 dxdy$, где S — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (нормаль внешняя).

□ В данном случае $\mathbf{a} = (x,\ 0,\ z^3)$, а поверхность S задана неявно равенством $F = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Поскольку верхняя ($z > 0$) и нижняя ($z < 0$) полусферы проектируются в одну и ту же область D (круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$), разобьем сферу на две указанные полусферы. Вычислим интеграл по каждой полусфере отдельно.

Для верхней полусферы вектор внешней нормали имеет вид (12.64) ($\cos\gamma > 0$):

$$\mathbf{n} = \frac{1}{F_z'} \operatorname{grad} F = \frac{1}{z}(x,\ y,\ z);$$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Для нижней полусферы вектор внешней нормали, согласно равенству (12.67) ($\cos\gamma < 0$),

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{F_z'} \operatorname{grad} F = -\frac{1}{z}(x,\ y,\ z);$$

$$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Вследствие аддитивности поверхностного интеграла по формуле (12.70) будем иметь

$$I = \iint\limits_D \frac{1}{z}(x^2 + z^4)\,dxdy - \iint\limits_D \frac{1}{z}(x^2 + z^4)\,dxdy.$$

Подставив в первый и второй интегралы $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ и $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ соответственно, получим

$$I = 2\iint\limits_D \frac{x^2 + z^4}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\,dxdy = 2\iint\limits_D \frac{x^2 + (1 - x^2 - y^2)^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\,dxdy.$$

Перейдем к полярным координатам:

$$I = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{\rho^2\cos^2\varphi + (1 - \rho^2)^2}{\sqrt{1 - \rho^2}}\,\rho d\rho =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int\limits_0^1 \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} + 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (1 - \rho^2)^{3/2}\,\rho d\rho =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^1 \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} - 2\pi\int\limits_0^1 (1 - \rho^2)^{3/2}\,d(1 - \rho^2) = 2\pi\int\limits_0^1 \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} + \frac{4}{5}\pi.$$

Осуществим замену $\rho = \sin t$, тогда

$$I = 2\pi\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 t dt + \frac{4}{5}\pi = -2\pi\int\limits_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t)\,d\cos t + \frac{4}{5}\pi =$$

$$= \frac{4}{3}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{32}{15}\pi.$$

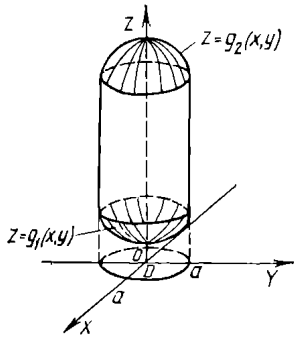


Рис. 12.20

Пусть S — часть цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, ограниченная снизу и сверху поверхностями $z = g_1(x,\ y)$ и $z = g_2(x,\ y)$ соответственно, где $g_1(x, y) \leqslant g_2(x,\ y)$, $(x,\ y) \in D$ (рис. 12.20). Выведем формулу для вычисления поверхностного интеграла (12.69) по поверхности S (нормаль внешняя).

Параметрически поверхность S можно задать в следующем виде (φ и z — параметры):

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\varphi;\\ y &= a\sin\varphi;\\ z &= z,\ g_1 \leqslant z \leqslant g_2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{aligned}\right\}$$

Вычислим якобианы:

$$\left|\frac{D(y,\ z)}{D(\varphi,\ z)}\right| = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a\cos\varphi;\quad \left|\frac{D(z,\ x)}{D(\varphi,\ z)}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = a\sin\varphi;$$

$$\left|\frac{D(x,\ y)}{D(\varphi,\ z)}\right| = \begin{vmatrix} -a\sin\varphi & 0 \\ a\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда из равенства (12.71) получим

$$\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy =$$

$$= a\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{g_1(a\cos\varphi,\ a\sin\varphi)}^{g_2(a\cos\varphi,\ a\sin\varphi)} (P(a\cos\varphi,\ a\sin\varphi,\ z)\cos\varphi + Q(a\cos\varphi,\ a\sin\varphi,\ z)\sin\varphi)\,dz. \qquad (12.77)$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\iint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + xy\,dxdy$, где S — внешняя сторона части цилиндра $x^2 + y^2 = 9$, заключенная между плоскостями $z = 0$ и $z = H$.

□ Полагая $x = 3\cos\varphi$, $y = 3\sin\varphi$, по формуле (12.77) получаем

$$\iint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^H (3\cos\varphi\cos\varphi + 3\sin\varphi\sin\varphi)\,dz =$$

$$= 9\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^H dz = 18\pi H.$$

Замечание. Пусть поверхность S задана явно в виде $x = f(y,\ z)$ $(y = f(x,\ z))$ и $\mathbf{n}$ — вектор нормали к ней. Тогда если $\cos(\widehat{\mathbf{n},\ X}) = \cos\alpha > 0$ $(\cos(\widehat{\mathbf{n},\ Y}) = \cos\beta > 0)$, то по аналогии с формулой (12.62) имеем

$$\mathbf{n} = \left(1,\ -f'_y,\ -f'_z\right)\ \left(\mathbf{n} = \left(-f'_x,\ 1,\ -f'_z\right)\right). \qquad (12.78)$$

Отсюда для вычисления поверхностного интеграла второго рода получим формулы:

для поверхности $x = f(y,\ z)$

$$\iint\limits_S (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,ds = \iint\limits_D (\mathbf{a},\ \mathbf{n})\,dydz = \iint\limits_D (P(f(y,\ z),\ y,\ z) - Q(f(y,\ z),\ y,\ z))\,f'_y -$$

$$- R(f(y,\ z),\ y,\ z))\,f'_z)\,dydz, \qquad (12.79)$$

где D — проекция S на плоскость YZ;

для поверхности $y = f(x,\ z)$

$$\iint\limits_S (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,ds = \iint\limits_D (\mathbf{a},\ \mathbf{n})\,dxdz = \iint\limits_D \left(-P(x,\ f(x,\ z),\ z)\,f'_x + Q(x,\ f(x,\ z),\ z) - R(x,\ f(x,\ z),\ z)\,f'_z\right)dxdz, \qquad (12.80)$$

где D — проекция поверхности S на плоскость XZ.

Для поверхности S, неявно заданной в виде $F(x,\ y,\ z) = 0$ при условии, что $F'_x \neq 0$ $\left(F'_y \neq 0\right)$ по аналогии с формулой (12.64) получаем

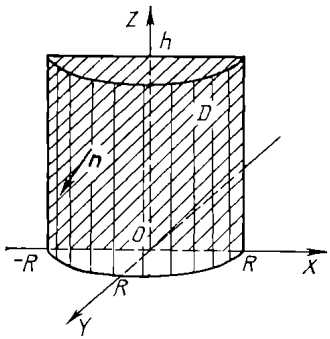


Рис. 12.21

$$\mathbf{n} = \frac{1}{F'_x}\operatorname{grad} F \quad \left(\mathbf{n} = \frac{1}{F'_y}\operatorname{grad} F\right), \tag{12.81}$$

если $\cos\alpha > 0$ ($\cos\beta > 0$). Тогда из формул (12.79) и (12.80) имеем:

$$\iint\limits_S (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,ds = \iint\limits_D (\mathbf{a},\ \mathbf{n})\,dydz =$$

$$= \iint\limits_D \frac{1}{F'_x}(\mathbf{a},\ \operatorname{grad} F)\,dydz \tag{12.82}$$

(D — проекция поверхности S на плоскость YZ);

$$\iint\limits_S (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,ds = \iint\limits_D (\mathbf{a},\ \mathbf{n})\,dxdz = \iint\limits_D \frac{1}{F'_y}(\mathbf{a},\ \operatorname{grad} F)\,dxdz \tag{12.83}$$

(D — проекция поверхности S на плоскость XZ).

В случае, если $\cos\alpha < 0$ ($\cos\beta < 0$), перед интегралами (12.82) и (12.83) появится минус.

Пример 10. Вычислить интеграл $I = \iint\limits_S x dydz + z dxdy$, где S — внешняя сторона боковой поверхности цилиндра: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, ограниченной плоскостями $z = 0$ и $z = h > 0$ (рис. 12.21).

□ Имеем $\mathbf{a} = (x,\ 0,\ z)$. Так как поверхность S задана явно в виде $y = f(x,\ z) = \sqrt{R^2 - x^2}$ и по условию $\cos\beta > 0$, то, согласно формуле (12.78), $\mathbf{n} = \left(-f'_x,\ 1,\ -f'_z\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}},\ 1,\ 0\right)$. Тогда $(\mathbf{a},\ \mathbf{n}) = \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, и по формуле (12.80)

$$I = \iint\limits_D \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dxdz = \int\limits_0^h dz \int\limits_{-R}^{R} \frac{x^2 dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{1}{2}\pi R^2 h.$$

12.4. ФОРМУЛЫ ОСТРОГРАДСКОГО И СТОКСА

Формула Остроградского*. Пусть S — поверхность, краем (ограничивающим контуром) которой служит замкнутая кривая Г. Очевидно, что один и тот же замкнутый контур Г может служить краем бесконечного числа поверхностей. Например, на рис. 12.22 изображены поверхности конуса S_1, полусферы S_2, части плоскости S_3, краем которых служит окружность Г.

Ограниченная поверхность, не имеющая края, называется *замкнутой*. Примерами являются сфера, тор, эллипсоид, поверхность куба, пирамиды и т. д.

Формула Остроградского связывает поверхностный интеграл по внешней стороне замкнутой поверхности с тройным интегралом по области, ограниченной этой поверхностью.

Имеет место

* М. В. Остроградский (1801—1861) — выдающийся русский математик.

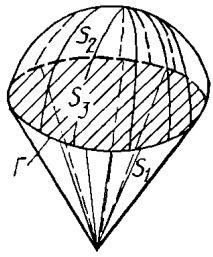


Рис. 12.22

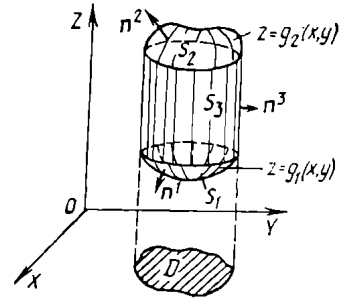


Рис. 12.23

Теорема 12.3. Пусть $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ — векторная функция, координатные функции P, Q и R которой непрерывны вместе со своими первыми частными производными в замкнутой области V, ограниченной поверхностью S. Тогда имеет место *формула Остроградского*

$$\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz, \quad (12.84)$$

в которой поверхностный интеграл в левой части вычисляется по внешней стороне замкнутой поверхности S.

□ Рассмотрим область V, ограниченную снизу поверхностью S_1, заданной уравнением $z = g_1(x, y)$, сверху — поверхностью S_2, — с уравнением $z = g_2(x, y)$, а с боков — цилиндрической поверхностью S_3 с образующими, параллельными оси Z (рис. 12.23). Такую область будем называть *z-цилиндрической*. Пусть D — проекция V на плоскость XY, а $\mathbf{n}^1$, $\mathbf{n}^2$ и $\mathbf{n}^3$ — векторы внешней нормали к поверхностям S_1, S_2 и S_3 соответственно.

Рассмотрим тройной интеграл

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz =$$

$$= \iint\limits_D R(x, y, g_2(x, y))\,dxdy - \iint\limits_D R(x, y, g_1(x, y))\,dxdy.$$

Первый из стоящих справа интегралов можно записать в соответствии с формулой (12.73) в виде поверхностного интеграла от $R(x, y, z)$, взятого по верхней стороне поверхности $z = g_2(x, y)$. Второй из этих интегралов можно рассматривать как поверхностный интеграл от $R(x, y, z)$, взятый по верхней стороне поверхности $z = g_1(x, y)$, или как интеграл по нижней стороне поверхности $z = g_1(x, y)$, взятый с обратным знаком.

Таким образом, получаем равенство

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \iint_{S_1} R dxdy + \iint_{S_2} R dxdy, \qquad (12.85)$$

где в правой части интегрирование ведется по внешней стороне поверхностей S_1 и S_2.

Так как $\mathbf{n}^3 = (n_{3x},\ n_{3y},\ 0)$, то по формуле (12.83) найдем

$$\iint_{S_3} R dxdy = \iint_D (0n_{3x} + 0n_{3y} + R0)\,dxdy = 0.$$

Поэтому, добавив интеграл $\iint_{S_3} R dxdy = 0$ в правую часть формулы (12.85), получим равенство

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \iint_S R dxdy, \qquad (12.86)$$

в котором в поверхностном интеграле интегрирование ведется по внешней замкнутой поверхности $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Аналогичным образом для *y-цилиндрической* и *x-цилиндрической* областей можно получить соответственно равенства:

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dxdydz = \iint_S Q dzdx; \quad \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dxdydz = \iint_S P dydz. \qquad (12.87)$$

Рассмотрим такие области V, которые можно разбить на конечное число как z-цилиндрических, так y-цилиндрических и x-цилиндрических областей. Для такой области справедливы равенства (12.86) и (12.87). Сложив их, получим формулу Остроградского. ■

Полагая в формуле (12.84) $P = x$, $Q = y$ и $R = z$, получаем формулу для вычисления объема области V, ограниченной замкнутой поверхностью S:

$$v = \frac{1}{3}\iint_S x dydz + y dzdx + z dxdy.$$

Формула Остроградского широко применяется для вычисления поверхностных интегралов по замкнутым поверхностям.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$I = \iint_S (e^{2y} + x)\,dydz + (x - 2y)\,dzdx + (y^2 + 3z)\,dxdy,$$

где S — внешняя сторона поверхности шара $(x-1)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 9$.

□ Так как $P = e^{2y} + x$, $Q = x - 2y$, $R = y^2 + 3z$, то $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 - 2 + 3 = 2$, и по формуле Остроградского

$$I = 2\iiint_V dxdydz = 2\frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 72\pi,$$

поскольку интеграл $\iiint_V dxdydz$ численно равен объему шара радиусом 3.

Пример 2. По внешней стороне замкнутой поверхности S тела V, заданного неравенствами $x^2+y^2 \leqslant z^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ (см. рис. 12.19), вычислить интеграл

$$I = \iint\limits_S x^2 z\,dydz + ydzdx + zdxdy.$$

□ По формуле Остроградского

$$I = \iiint\limits_V (2xz+2)\,dxdydz = 2\iiint\limits_V (xz+1)\,dxdydz.$$

Перейдя в тройном интеграле к цилиндрическим координатам, получим

$$I = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 d\rho \int\limits_\rho^1 (z\rho\cos\varphi + 1)\,\rho dz = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\rho^2\cos\varphi\,\frac{z^2}{2} + \rho z\right)\Big|_{z=\rho}^{z=1} d\rho =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\frac{\rho^2-\rho^4}{2}\cos\varphi + \rho - \rho^2\right) d\rho = 2\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{15}\cos\varphi + \frac{1}{6}\right) d\varphi = \frac{2}{3}\pi.$$

Пример 3. Показать, что если функция $u = u(x, y, z)$ удовлетворяет *уравнению Лапласа* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{dz^2} = 0$, то

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,ds = \iint\limits_S (\operatorname{grad} u,\ \mathbf{n}^0)\,ds = 0,$$

где $\mathbf{n}^0$ — единичный вектор внешней нормали к замкнутой поверхности S.

□ По формуле Остроградского

$$\iint\limits_S (\operatorname{grad} u,\ \mathbf{n}^0)\,ds = \iint\limits_S \frac{\partial u}{dx}\,dydz + \frac{\partial u}{\partial y}\,dzdx + \frac{\partial u}{\partial z}\,dxdy =$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dxdydz = 0,$$

согласно уравнению Лапласа.

Формула Стокса*. Эта формула связывает криволинейный интеграл по замкнутой пространственной кривой Γ с поверхностным интегралом по поверхности S, краем которой является Γ.

Справедлива

Теорема 12.4. Пусть Γ — замкнутая кусочно-гладкая ориентированная кривая в $\mathbf{R}^3$ и S — гладкая поверхность, краем которой служит Γ (рис. 12.24). Пусть, далее, в окрестности S задана векторная функция $\mathbf{a} = (P, Q, R)$, координатные функции P, Q и R которой непрерывны вместе со

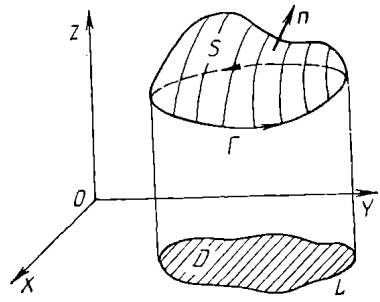


Рис. 12.24

* Дж. Стокс (1819—1903) — английский механик и математик.

своими первыми частными производными в этой окрестности. Тогда имеет место *формула Стокса*

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \iint_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy dz + \\ + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy. \qquad (12.88)$$

□ Пусть поверхность S задана явно уравнением $z = f(x, y)$. Пусть, далее, D — проекция S на плоскость XY, а L — проекция Γ на ту же плоскость (рис. 12.24). Предположим, что $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, — параметрические уравнения кривой L. Тогда $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = f(x(t), y(t)) = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, — параметрические уравнения края Γ поверхности S. По формуле (12.19) преобразования криволинейного интеграла в определенный интеграл получим

$$I = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\alpha}^{\beta} (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t))\, dt.$$

Использовав цепочное правило вычисления производной функции $z(t) = f(x(t), y(t))$, будем иметь

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \left(Px'(t) + Qy'(t) + R\left(\frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)\right)\right) dt = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\left(P + \frac{\partial f}{\partial x} R\right) x'(t) + \left(Q + \frac{\partial f}{\partial y} R\right) y'(t)\right) dt = \\ = \oint_{L} \left(P + \frac{\partial f}{\partial x} R\right) dx + \left(Q + \frac{\partial f}{\partial y} R\right) dy, \qquad (12.89)$$

где в последнем интеграле $P = P(x, y, f(x, y))$, $Q = Q(x, y, f(x, y))$, $R = R(x, y, f(x, y))$.

Применив к криволинейному интегралу (12.89) формулу Грина (12.44), получим

$$I = \iint_{D} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + \frac{\partial f}{\partial y} R\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + \frac{\partial f}{\partial x} R\right)\right) dx dy. \qquad (12.90)$$

Используя формулу полной производной (6.49), ч. II, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + \frac{\partial f}{\partial y} R\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} R + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(P + \frac{\partial f}{\partial x} R\right) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} R + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + \frac{\partial f}{\partial y} R\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + \frac{\partial f}{\partial x} R\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) - \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right). \qquad (12.91)$$

Тогда из равенства (12.89) — (12.91) с учетом формулы (12.73) получим

$$\oint_\Gamma P dx + Q dy + R dz =$$

$$= \iint_D \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right) dxdy =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

так как вектор нормали к поверхности $z = f(x, y)$ имеет вид $\mathbf{n} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$. ■

Пусть теперь Γ — замкнутая кривая в плоскости XY, а S — область D, ограниченная этой кривой. Тогда $dz = 0$, а вектор нормали к D имеет вид $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Следовательно, в этом случае из равенства (12.88) получим формулу Грина (12.44). Таким образом, формула Грина — частный случай формулы Стокса.

Замечание. Формулу Стокса можно легко запомнить, если воспользоваться следующим приемом. Составим формально определитель

$$\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (12.92)$$

Раскладывая его по элементам первой строки и учитывая, что произведение $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ или $\frac{\partial}{\partial z}$ на функцию понимается как операция дифференцирования по соответствующей переменной, получаем подынтегральное выражение в правой части формулы Стокса (12.88). Таким образом, символически формула Стокса может быть записана в виде

$$\oint_\Gamma P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (12.93)$$

Пример 4. Преобразовать по формуле Стокса криволинейный интеграл $\oint_\Gamma x^2 y dx + z dy + x dz$ в поверхностный.

□ Имеем $P = x^2 y$, $Q = z$ и $R = x$. Составим определитель (12.92) и разложим его по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & z & x \end{vmatrix} = -dydz - dzdx - x^2 dxdy.$$

Таким образом, по формуле (12.93) получаем

$$\oint_{\Gamma} x^2ydx + zdy + xdz = \iint_{S} -dydz - dzdx - x^2dxdy.$$

Заметим, что при доказательстве формулы Стокса вид поверхности S с краем Γ не играет никакой роли. Важна лишь ее ориентация в пространстве. Поэтому при решении конкретных примеров поверхность S выбирается такой, чтобы поверхностный интеграл по ней вычислялся наиболее удобным способом.

Приведем примеры вычисления криволинейных интегралов второго рода по замкнутым пространственным кривым Γ с помощью формулы Стокса.

Пример 5. Используя формулу Стокса, вычислить интеграл

$$\oint_{\Gamma} (x + 3y + 2z)\,dx + (2x + z)\,dy + (x - y)\,dz,$$

где Γ — контур треугольника ABC с вершинами $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ (обход контура указан на рис. 12.25).

□ Имеем $P = x + 3y + 2z$, $Q = 2x + z$, $R = x - y$. За поверхность S примем плоскость треугольника ABC, уравнение которой имеет вид $x/2 + y/3 + z/1 = 1$ или $F = 3x + 2y + 6z - 6 = 0$.

По формуле Стокса

$$I = \oint_{\Gamma} (x + 3y + 2z)\,dx + (2x + z)\,dy + (x - y)\,dz =$$

$$= \iint_{S} -2dydz + dzdx - dxdy.$$

Вектор нормали $\mathbf{n}$ к S имеет координаты $F'_x = 3$, $F'_y = 2$, $F'_z = 6$, т. е. $\mathbf{n} = (3, 2, 6)$. Тогда по формуле (12.73)

$$I = \iint_{\triangle AOB} \frac{1}{6}(-2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 6)\,dxdy = -\frac{5}{3}\iint_{\triangle AOB} dxdy = -5,$$

так как площадь треугольника AOB равна 3.

Пример 6. Вычислить интеграл

$$I = \oint_{\Gamma} (z^2 - x^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy + (y^2 - z^2)\,dz$$

по контуру ($z > 0$)

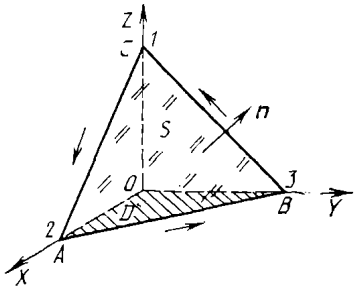


Рис. 12.25

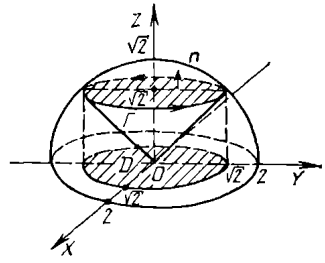


Рис. 12.26

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=4;\\ x^2+y^2&=z^2, \end{aligned}\right\}$$

пробегаемому против часовой стрелки.

□ Контуром интегрирования Γ является окружность $x^2+y^2=2$, $z=\sqrt{2}$, полученная в результате пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=4$ и конуса $x^2+y^2=z^2$ (рис. 12.26). В качестве поверхности S возьмем плоскость круга с краем Γ. По формуле Стокса,

$$I=2\iint\limits_S ydydz+zdzdx+xdxdy.$$

Так как $z=\sqrt{2}$ — уравнение поверхности S, то вектор нормали к ней $\mathbf{n}=(0,\ 0,\ 1)$. Тогда по формуле (12.73) получаем

$$I=2\iint\limits_D xdxdy=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho^2\cos\varphi d\rho=0.$$

Учитывая связь поверхностных интегралов первого и второго рода [равенство (12.72)], формулу Стокса (12.88) можно переписать в виде

$$\oint\limits_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_S\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)ds=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}ds,\qquad(12.94)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S.

Пример 7. Вычислить интеграл $I=\oint\limits_\Gamma y^2dx-x^2dy+z^2dz$ по контуру Γ, получаемому при пересечении параболоида $x^2+z^2=1-y$ с координатными плоскостями (рис. 12.27).

□ Поверхность S описывается неявно уравнением $F=x^2+z^2+y-1=0$, поэтому единичный вектор нормали к S

$$\mathbf{n}^0=\frac{\operatorname{grad}F}{|\operatorname{grad}F|}=\frac{(2x,\ 1,\ 2z)}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}},$$

т. е. $\cos\alpha=\dfrac{2x}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{2z}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}}$ (знак перед радикалом — плюс, так как $\cos(\widehat{\mathbf{n}^0,\ \mathbf{k}})\geqslant 0$).

По формуле (12.94)

$$I=\iint\limits_S-2(x+y)\cos\gamma ds=$$

$$=-4\iint\limits_S\frac{(x+y)zds}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}},$$

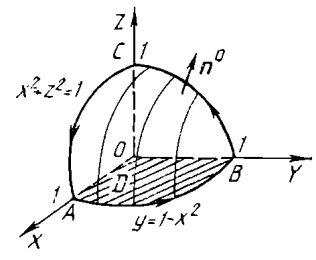


Рис. 12.27

где S — поверхность параболоида.

Так как для неявно заданной поверхности

$$ds = \frac{|\operatorname{grad} F|}{|F'_z|}\,dxdy = \frac{\sqrt{4x^2+1+4z^2}}{2z}\,dxdy,$$

то

$$I = -2\iint\limits_D (x+y)\,dxdy,$$

где D — проекция поверхности S на плоскость XY.

Отсюда $I = -2\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x^2} (x+y)\,dy = -\frac{41}{30}$.

13. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

13.1. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Скалярное поле. Пространство (или часть его V), в каждой точке которого определена скалярная величина, называется *скалярным полем.*

Таким образом, скалярное поле определяется числовой функцией $u = u(x, y, z)$, заданной в некоторой области V пространства. В этом случае будем говорить, что задано поле u. Примерами скалярных полей являются поле температур тела, поле давлений в некотором объеме и др.

Если скалярное поле задано функцией двух переменных $u = u(x, y)$, оно называется *плоским.*

Графически скалярное поле изображается с помощью *поверхностей уровня*, в каждой точке которых значение поля постоянно, т. е. поверхность уровня скалярного поля u определяется равенством $u(x, y, z) = C = \text{const}$. Если поле плоское, то равенство $u(x, y) = C = \text{const}$ определяет линию уровня поля. Примером поверхностей уровня могут служить эквипотенциальные поверхности в электростатическом поле. Примерами линий уровня являются изобары (линии одинакового давления), линии одинаковой высоты на топографических картах и т. п.

Пусть $u = u(x, y, z)$ — гладкая функция. Напомним, что *производной скалярного поля u по направлению вектора* $\mathbf{l}$ в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ называется число

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (13.1)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\mathbf{l}$.

Градиентом скалярного поля u в точке M_0 называется вектор

$$\mathbf{grad}\, u(M_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{M_0} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\mathbf{k}. \qquad (13.2)$$

Если $\mathbf{l} = (l_x, l_y, l_z)$, то, согласно формуле (6.63), ч. II,

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \mathbf{l}} = \frac{(\mathbf{grad}\, u(M_0), \mathbf{l})}{|\mathbf{l}|} = \frac{(\partial u(M_0)/\partial x)\, l_x + (\partial u(M_0)/\partial y)\, l_y + (\partial u(M_0)/\partial z)\, l_z}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}}. \qquad (13.3)$$

Производная поля в данной точке M_0 по направлению $\mathbf{l}$ характеризует скорость изменения поля в направлении l. Градиент ска-

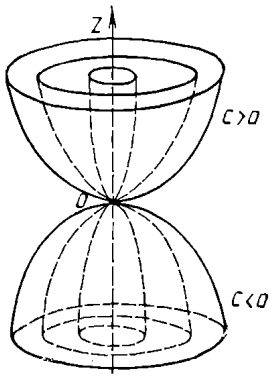


Рис. 13.1

лярного поля в точке M_0 характеризуется тем, что производная поля в ней в направлении градиента максимальна и равна $|\mathbf{grad}\, u(M_0)|$. Вектор $\mathbf{grad}\, u(M_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня поля u в сторону наибольшего возрастания функции u.

Пример 1. Найти поверхности уровня поля $u = (x^2 + 4y^2)/z$.

□ Поверхностями уровня этого поля являются эллиптические параболоиды ($C \neq 0$, рис. 13.1)

$$\left(\frac{x^2+4y^2}{z} = C\right) \Leftrightarrow \left(z = \frac{x^2+4y^2}{C}\right).$$

При $C = 0$ получаем ось Z.

Пример 2. Найти производную поля $u = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2+z^2}$ в точке $M_0 = (3, 0, -4)$ по направлению нормали к поверхности S: $x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 = 4z + 4$, образующей острый угол с осью Z.

□ Уравнение поверхности S задано в неявном виде $F = x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 - 4z - 4 = 0$. По формуле (12.65) находим единичный вектор нормали в точке M_0:

$$\mathbf{n}^0 = \pm\frac{\mathbf{grad}\, F(M_0)}{|\mathbf{grad}\, F(M_0)|} = \pm\frac{(2x-6)\,\mathbf{i} + 18y\,\mathbf{j} + (2z-4)\,\mathbf{k}}{\sqrt{(2x-6)^2 + (18y^2) + (2z-4)^2}}\Bigg|_{M_0} = \mp\mathbf{k}.$$

Так как по условию угол между $\mathbf{n}^0$ и осью Z острый, то $\mathbf{n}^0 = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$. По формуле (13.1) находим искомую производную:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \mathbf{l}} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = -\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\Bigg|_{M_0} = \frac{4}{5}.$$

Если заданы два скалярных поля $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$, то угол α между их градиентами в данной точке M_0, согласно формуле (1.33), ч. I, определяется равенством

$$\cos\alpha = \frac{(\mathbf{grad}\, u(M_0),\ \mathbf{grad}\, v(M_0))}{|\mathbf{grad}\, u(M_0)|\,|\mathbf{grad}\, v(M_0)|} = \frac{u'_x v'_x + u'_y v'_y + u'_z v'_z}{\sqrt{u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z}\,\sqrt{v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z}}. \tag{13.4}$$

Векторное поле. Если в каждой точке пространства (или его части V) определен вектор $\mathbf{a} = (P, Q, R)$, где $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ и $R = R(x, y, z)$ — скалярные функции, то говорят, что в этом пространстве (или в V) задано *векторное поле* $\mathbf{a}$. Примерами векторных полей являются поле скоростей текущей жидкости, поле электрической напряженности и др. Векторное поле $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ называют непрерывным, если функции P, Q и R непрерывны в рассматриваемой области.

Одной из важных характеристик векторного поля является векторная, или силовая, линия поля. *Векторной (силовой) линией по-*

ля **a** называется кривая, в каждой точке M которой касательная совпадает с направлением поля **a** (рис. 13.2).

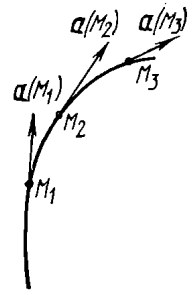


Рис. 13.2

Примерами векторных линий могут служить линии тока жидкости, силовые линии магнитного поля и др.

Составим дифференциальные уравнения векторных линий поля **a**.

Если **r** — радиус-вектор векторной линии $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то вектор $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ направлен по касательной к ней. Тогда и вектор

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\,dt = (x'(t)\,dt,\ y'(t)\,dt,\ z'(t)\,dt) = (dx,\ dy,\ dz)$$

также направлен по касательной к векторной линии. Отсюда, согласно определению векторной линии, векторы $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ и $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ коллинеарны, а значит, их координаты пропорциональны, т. е.

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \tag{13.5}$$

Это и есть система дифференциальных уравнений векторных линий.

Пример 3. Найти векторные линии поля $\mathbf{a} = (y + z)\,\mathbf{i} - x\mathbf{j} - x\mathbf{k}$.

□ Согласно уравнениям (13.5),

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{-x} \text{ или } \left.\begin{array}{l} xdy = xdz; \\ xdx = -(y+z)\,dy. \end{array}\right\} \tag{13.6}$$

Из первого уравнения системы получаем $y - z = C$, где C — произвольная постоянная. Согласно равенству $dy = dz$, из второго уравнения системы находим, что

$$(xdx + ydy + zdz = 0) \Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2 = R^2), \tag{13.7}$$

где R — постоянная.

Таким образом, уравнениями векторных линий являются линии пересечения сфер $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и параллельных плоскостей $y - z = C$, т. е. окружности

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \\ y - z = C. \end{array}\right\} \tag{13.8}$$

Пространственные области, целиком составленные из векторных линий, называются *векторными трубками*. В каждой точке M поверхности векторной трубки вектор $\mathbf{a}(M)$ лежит в касательной плоскости к поверхности.

Поле градиента и его линии. Если $u = u(x, y, z)$ — скалярное поле, то $\mathbf{a} = \mathbf{grad}\,u$ называется *полем градиента* скалярного поля u. *Векторной линией поля градиента* или *линией градиента* называется кривая, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением $\mathbf{grad}\,u$. Согласно свойству градиента поля u, линия градиента есть кривая, вдоль которой функция $u(x, y, z)$ макси-

мально возрастает (или максимально убывает). Кроме того, линии градиента всегда ортогональны к поверхностям уровня поля u.

Так как $\mathbf{grad}\, u = (u'_x, u'_y, u'_z)$, то в соответствии с равенством (13.5) линии градиента описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{u'_x} = \frac{dy}{u'_y} = \frac{dz}{u'_z}. \tag{13.9}$$

Пример 4. Найти линии градиента скалярного поля $u = x + y^2$.

□ Так как $\mathbf{grad}\, u = (1,\ 2y,\ 0)$, то, согласно равенству (13.6), получим систему

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{0}.$$

Отсюда $dz = 0$, т. е. $z = C_1$, где $C_1 = \text{const}$. Из равенства $dx = \dfrac{dy}{2y}$ получаем $x = \dfrac{1}{2}\ln y + C_2$, где $C_2 = \text{const}$.

Таким образом, линиями градиента поля $u = x + y^2$ являются линии пересечения плоскостей $z = C_1$ с цилиндрическими поверхностями $x = \dfrac{1}{2}\ln y + C_2$.

13.2. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ

Поток вектора через поверхность, его физический смысл. Пусть $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ — векторное поле скоростей текущей несжимаемой жидкости, а S — кусочно-гладкая поверхность. Требуется определить объем жидкости, протекающей через эту поверхность за единицу времени.

Кусочно-гладкими кривыми разобьем поверхность S на части S_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Выделим площадку S_i площадью Δs_i, и пусть $\mathbf{n}^0$ — единичный вектор нормали в произвольной точке $M_i \in S_i$ (рис. 13.3). Объем протекающей жидкости через S_i в единицу времени равен объему криволинейной призмы, изображенной на рис. 13.3. При разбиении S на достаточно мелкие части площадку S_i с площадью Δs_i можно считать плоской. Тогда объем $\Delta\Pi_i$ призмы приближенно равен $\Delta\Pi_i = h\Delta s_i$. Но $h = (\mathbf{a}(M_i),\ \mathbf{n}^0)$. Поэтому $\Delta\Pi_i \approx (\mathbf{a}(M_i),\ \mathbf{n}^0)\,\Delta s_i$.

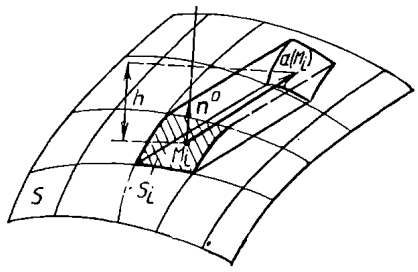


Рис. 13.3

Сумма $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}(M_i),\ \mathbf{n}^0)\,\Delta s_i$ выражает приближенно объем жидкости, протекающей через всю поверхность S. В пределе при $\max d_i \to 0$, где d_i — диаметр площадки S_i, получим точный объем Π жидкости, протекающей через поверх-

ность S в единицу времени в виде поверхностного интеграла второго рода:

$$\Pi = \iint\limits_S (\mathbf{a}(M), \mathbf{n}^0)\, ds, \qquad (13.10)$$

где $M = (x, y, z) \in S$.

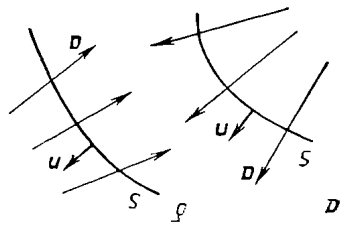


Рис. 13.4

Пусть $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ — произвольное векторное поле, а S — кусочно-гладкая ориентированная поверхность в $\mathbf{R}^3$. *Потоком векторного поля* **a** (вектора **a**) через поверхность S называется поверхностный интеграл (13.10). Подчеркнем, что поток — скалярная величина. При этом если $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)} < \pi/2$, то $\Pi > 0$. В этом случае поток вектора **a** идет с внутренней на внешнюю сторону поверхности S (рис. 13.4, *а*). Если же $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)} > \pi/2$, то $\Pi < 0$ и, значит, поток вектора **a** идет с внешней на внутреннюю сторону поверхности S (рис. 13.4, *б*). При перемене ориентации поверхности знак потока Π меняется на противоположный вследствие известного свойства поверхностного интеграла второго рода [формула (12.75)].

Согласно равенству (12.72), поток вектора $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ можно записать в виде

$$\Pi = \iint\limits_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, ds = \iint\limits_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \\ = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds, \qquad (13.11)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора нормали $\mathbf{n}^0$ к S.

Получим формулы для вычисления потока вектора $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ через поверхность S в зависимости от способа ее задания. Рассмотрим случай, когда нормаль **n** к поверхности S образует с осью Z угол $\gamma \leqslant \pi/2$.

Пусть поверхность S задана явно уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, где D — проекция поверхности S на плоскость XY. Так как в этом случае $\mathbf{n} = (-f'_x, -f'_y, 1)$, то из формулы (13.11) получаем

$$\Pi = \iint\limits_S (-f'_x P(x, y, f(x, y)) - f'_y Q(x, y, f(x, y)) + \\ + R(x, y, f(x, y)))\, dxdy. \qquad (13.12)$$

Если поверхность S задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, $F'_z \neq 0$, то $\mathbf{n} = \frac{1}{F'_z}(F'_x, F'_y, F'_z)$ и, следовательно,

$$\Pi = \iint\limits_D \frac{1}{F'_z}(F'_x P(x, y, z) + F'_y Q(x, y, z) + F'_z R(x, y, z))\, dxdy, \qquad (13.13)$$

где z определяется из уравнения поверхности $F(x, y, z) = 0$.

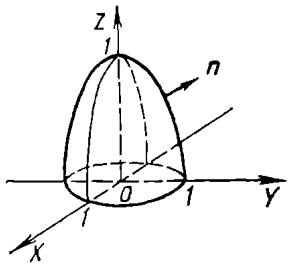


Рис. 13.5

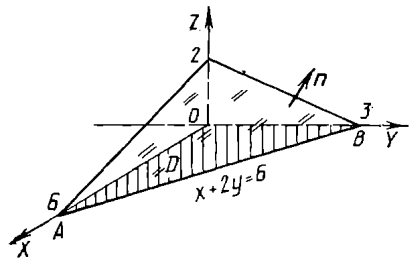


Рис. 13.6

Если же поверхность S задана параметрически в виде $x = x(u,v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in W$, то из равенств (12.58) и (13.11) получаем

$$\Pi = \iint\limits_W \left(P(u, v) \left| \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right| + Q(u, v) \left| \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \right| + R(u, v) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| \right) du dv =$$

$$= \iint\limits_W \left| \begin{matrix} P & Q & R \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{matrix} \right| du dv, \qquad (13.14)$$

где $P(u, v) = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$; $Q(u, v) = Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$; $R(u, v) = R(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

Пример 1. Вычислить поток вектора $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через поверхность части параболоида $1 - z = x^2 + y^2$, отсекаемой от него плоскостью $z = 0$ (рис. 13.5, нормаль внешняя).

□ Так как $P = y$, $Q = x$, $R = z^2$, $z'_x = -2x$, $z'_y = -2y$, а проекцией на плоскость XY является круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$, то по формуле (13.12) получаем

$$\Pi = \iint\limits_D (2xy + 2yx + z^2)\, dxdy = \iint\limits_D (4xy + (1 - (x^2 + y^2))^2)\, dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (4\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi - (1 - \rho^2)^2)\, \rho d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (2\rho^3 \sin 2\varphi - \rho(1 - \rho^2)^2)\, d\rho = \pi/3.$$

Пример 2. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 5z\mathbf{k}$ через верхнюю сторону поверхности треугольника, полученного при пересечении плоскости $x + 2y + 3z - 6 = 0$ с координатными плоскостями (рис. 13.6).

□ Поверхность S задана неявно уравнением $F = x + 2y + 3z - 6 = 0$. Так как $P = 2$, $Q = -x$, $R = 5z$ и $F'_x = 1$, $F'_y = 2$, $F'_z = 3$, то по формуле (13.13)

$$\Pi = \iint\limits_D \frac{1}{3} (2 - 2x + 15z)\, dxdy,$$

где D — треугольник AOB. Из уравнения плоскости имеем $z = 2 - x/3 - 2y/3$. Поэтому

$$\Pi = \frac{1}{3}\iint\limits_D (32 - 7x - 10y)\,dxdy = \frac{1}{3}\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{6-2y} (32 - 7x - 10y)\,dx = 24.$$

Пример 3. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = (x + xy^2)\,\mathbf{i} + (y - yx^2)\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через часть поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, вырезаемую плоскостью $z = 0$ $(z \geqslant 0)$. Нормаль внешняя.

□ Поверхность S представляет собой верхнюю полусферу радиусом 3. Зададим ее параметрически в виде $x = 3\sin\theta\cos\varphi$, $y = 3\sin\theta\sin\varphi$, $z = 3\cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Так как $\left|\frac{D(y,\ z)}{D(\theta,\ \varphi)}\right| = 9\sin^2\theta\cos\varphi$, $\left|\frac{D(z,\ x)}{D(\theta,\ \varphi)}\right| = 9\sin^2\theta\sin\varphi$, $\left|\frac{D(x,\ y)}{D(\theta,\ \varphi)}\right| = 9\cos\theta\sin\theta$ и $P = x(1 + y^2)$, $Q = y(1 - x^2)$, $R = z$ (см. пример 7, § 12.3), то по формуле (13.14) получаем

$$\Pi = \iint\limits_W (3\sin\theta\cos\varphi\,(1 + 9\sin^2\theta\sin^2\varphi)\,9\sin^2\theta\cos\varphi + 3\sin\theta\sin\varphi\,(1 - 9\sin^2\theta\cos^2\varphi)\,9\sin^2\theta\sin\varphi + 3\cos\theta\cdot 9\cos\theta\sin\theta)\,d\theta d\varphi = 27\iint\limits_W (\sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta)\,d\theta d\varphi = 27\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = 54\pi.$$

Замечание. Если поверхность S задана явно уравнением $x = f(y, z)$, или $y = f(x, z)$, поток вектора $\mathbf{a}$ через внешнюю сторону этой поверхности вычисляется по формулам (12.79) и (12.80).

Поток вектора через замкнутую поверхность. Если поверхность S замкнута, то в качестве вектора нормали к ней возьмем внешнюю нормаль. Тогда поток вектора $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ через поверхность удобно вычислять по формуле Остроградского:

$$\Pi = \iint\limits_S (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,ds = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz, \qquad (13.15)$$

где V — область, ограниченная поверхностью S.

Пусть $\mathbf{a}$ — поле скоростей текущей несжимаемой жидкости. Если $\Pi = 0$, это означает, что из тела V, ограниченного поверхностью S, вытекает столько жидкости, сколько и втекает в него. Если $\Pi > 0$, то жидкости вытекает больше, чем втекает. Это говорит о том, что внутри тела V имеется *источник* — место, где жидкость появляется. Если $\Pi < 0$, то жидкости вытекает из тела меньше, чем втекает. В этом случае говорят, что внутри тела V имеется *сток* — место, где жидкость исчезает.

Пример 4. Вычислить поток вектора $\mathbf{a} = (y^2 + xz)\,\mathbf{i} + (yx - z)\,\mathbf{j} + (yz + x)\,\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность S, ограниченную цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостями $z = 0$, $z = \sqrt{2}$ (нормаль внешняя).

□ Так как $P = y^2 + xz$, $Q = yx - z$, $R = yz + x$ и поверхность S замкнута, то по формуле (13.15)

$$\Pi = \iiint\limits_V (z + x + y)\, dxdydz.$$

Перейдя к цилиндрическим координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$; $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{2}$, получим

$$\Pi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_0^{\sqrt{2}} (z + \rho(\cos\varphi + \sin\varphi))\, dz = \pi.$$

Если, например, замкнутая поверхность $S = S_1 \cup S_2$, то вследствие аддитивности поверхностного интеграла второго рода поток вектора $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ через поверхность S_1 можно вычислить по формуле

$$\iint\limits_{S_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, ds = \iint\limits_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, ds - \iint\limits_{S_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, ds =$$
$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz - \iint\limits_{S_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, ds. \qquad (13.16)$$

Пример 5. Найти поток поля $\mathbf{a} = (x - y)\,\mathbf{i} + (x + y)\,\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, заключенную между плоскостями $z = 0$ и $z = 2$ (рис. 13.7, нормаль внешняя).

□ В нашем случае $P = x - y$, $Q = x + y$, $R = z^2$. Рассмотрим замкнутую поверхность S, образованную цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостями P_1: $z = 0$ и P_2: $z = 2$. Тогда в соответствии с формулой (13.16) искомый поток

$$\Pi = \iiint\limits_V (1 + 1 + 2z)\, dxdydz - \iint\limits_{P_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, ds - \iint\limits_{P_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, ds.$$

Вычислим каждый из интегралов. Перейдя к цилиндрическим координатам, найдем

$$2\iiint\limits_V (1 + z)\, dxdydz = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_0^2 (1 + z)\, dz = 8\pi.$$

Так как нормаль к плоскости P_1 имеет вид $\mathbf{n}^1 = (0, 0, -1)$, то

$$\iint\limits_{P_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, ds = -\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} z^2 dxdy = 0,$$

поскольку $z = 0$ — уравнение плоскости P_1. На плоскости P_2 имеем $z = 2$ и $\mathbf{n}^2 = (0, 0, 1)$, поэтому

$$\iint\limits_{P_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, ds = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} z^2 dxdy = 4\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} dxdy = 4\pi.$$

Таким образом, $\Pi = 8\pi - 0 - 4\pi = 4\pi$. ■

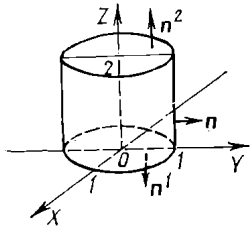


Рис. 13.7

Дивергенция векторного поля. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ и выделим в нем малое тело V объемом v, ограниченное замкнутой поверхностью S. Найдем отношение потока вектора $\mathbf{a}$ через поверхность S к объему v:

$$\iint\limits_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, ds/v. \qquad (13.17)$$

Это отношение характеризует среднюю плотность источников или стоков в единице объема. Предел отношения (13.17) при стягивании объема v в некоторую точку $M \in V$ называется *дивергенцией* вектора $\mathbf{a}$ в точке M или *расходимостью* и обозначается $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$.

Таким образом, по определению,

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{V \to M} \frac{\iint\limits_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, ds}{v}. \tag{13.18}$$

Определение (13.18) не связано с системой координат в пространстве, поэтому оно называется *инвариантным определением дивергенции*.

Пусть теперь в $\mathbf{R}^3$ введена декартова прямоугольная система координат XYZ и $\mathbf{a} = (P, Q, R)$, где P, Q, и R — гладкие функции. Используя формулу Остроградского, из выражения (13.18) получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{V \to M} \frac{\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz}{v} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\Big|_M,$$

поскольку искомый предел есть производная тройного интеграла по области интегрирования V, равная подынтегральной функции.

Итак, в декартовой системе координат

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{13.19}$$

По определению, $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$ характеризует плотность источников или стоков в точке M. Если $\operatorname{div} \mathbf{a}(M) > 0$, $\operatorname{div} \mathbf{a}(M) < 0$), в точке M имеются источники (стоки). Если $\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = 0$, в точке M нет ни источников, ни стоков.

Отметим свойства дивергенции.

1°. $\operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{b}$.

2°. $\operatorname{div} \mathbf{c} = 0$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

3°. $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \mathbf{grad}\, \varphi)$, (13.20)

где $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — скалярная функция.

4°. $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{grad}\, \varphi)$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

Свойства 1°—4° следуют непосредственно из формулы (13.19).

Докажем, к примеру, равенство (13.20). Имеем $\varphi \mathbf{a} = (\varphi P, \varphi Q, \varphi R)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi P) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi Q) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi R) = \\
&= P \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial P}{\partial x} + Q \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi \frac{\partial Q}{\partial y} + R \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varphi \frac{\partial R}{\partial z} = \\
&= \left(P \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q \frac{\partial \varphi}{\partial y} + R \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + \varphi \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) = \\
&= (\mathbf{a}, \mathbf{grad}\, \varphi) + \varphi \operatorname{div} \mathbf{a}.
\end{aligned}$$

Используя дивергенцию, теорему Остроградского, можно записать *в векторной форме*:

$$\iint\limits_S (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,ds = \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{a}\,dxdydz, \qquad (13.21)$$

т. е. *поток вектора* $\mathbf{a}$ *через замкнутую поверхность равен тройному интегралу от дивергенции вектора по объему, ограниченному этой поверхностью.*

Пример 6. Найти поток радиуса-вектора через любую замкнутую поверхность (нормаль внешняя).

□ Так как $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, то по формуле (13.21)

$$\iint\limits_S (\mathbf{r},\ \mathbf{n}^0)\,ds = \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{r}\,dxdydz = \iiint\limits_V (1+1+1)\,dxdydz = 3\iiint\limits_V dxdydz = 3v,$$

где v — объем тела V.

13.3. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Циркуляция векторного поля, ее физический смысл. Пусть в декартовой системе координат определено векторное поле $\mathbf{a} = (P,\ Q,\ R)$. Кроволинейный интеграл

$$C = \oint\limits_\Gamma (\mathbf{a},\ \vec{\tau}^0)\,dl = \oint\limits_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz, \qquad (13.22)$$

взятый по замкнутому кусочно-гладкому контуру Γ, называется *циркуляцией вектора* $\mathbf{a}$ вдоль этого контура. Здесь $\vec{\tau}^0$ — единичный вектор касательной к контуру, указывающий направление движения вдоль контура.

Если $\mathbf{a}$ — вектор силы (силовое поле), то циркуляция (13.22) представляет собой работу этой силы по замкнутому контуру Γ.

Пример 1. Найти циркуляцию поля $\mathbf{a} = x\mathbf{i} - 2z^2\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ вдоль линии Γ пересечения цилиндра $x^2/9 + y^2/16 = 1$ с плоскостью $z = 2x - y + 1$.

□ Перейдем к параметрическому заданию контура Γ. Координаты x и y определим из параметрических уравнений эллипса $x^2/9 + y^2/16 = 1$, т. е. $x = 3\cos t$, $y = 4\sin t$, а z найдем из уравнения плоскости $z = 2x - y + 1$, т. е. $z = 6\cos t - 4\sin t + 1$, $t \in [0,\ 2\pi]$. В соответствии с формулой (12.19), получаем

$$C = \oint\limits_\Gamma xdx - 2z^2dy + ydz = \int\limits_0^{2\pi} (3\cos t\,(-3\sin t) - 2\,(6\cos t -$$

$$- 4\sin t + 1)^2\,4\cos t + 4\sin t\,(-6\sin t - 4\cos t))\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (39\cos t\sin t - 288\cos^3 t - 8\cos t - 128\sin^2 t\cos t +$$

$$+ 384\cos^2 t\sin t - 96\cos^2 t - 24\sin^2 t)\,dt =$$

$$= -24\int\limits_0^{2\pi} (4\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = -120\pi.$$

Ротор векторного поля. Преобразуем циркуляцию (13.22) по формуле Стокса (12.83):

$$C = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \iint_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \qquad (13.23)$$

где S — поверхность, краем которой является контур Γ.

Правая часть равенства (13.23) есть поток вектора

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

через поверхность S. Этот вектор называется *ротором* или *вихрем* векторного поля $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ и обозначается $\mathbf{rot\,a}$.

Итак, по определению,

$$\mathbf{rot\,a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \qquad (13.24)$$

Символически вектор (13.24) можно получить из определителя (если разложить его по элементам первой строки)

$$\mathbf{rot\,a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (13.25)$$

Пример 2. Найти ротор поля $\mathbf{a} = (e^z + 2x)\,\mathbf{i} + e^x \mathbf{j} + e^y \mathbf{k}$.

□ По формуле (13.25)

$$\mathbf{rot\,a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^z + 2x & e^x & e^y \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial e^y}{\partial y} - \frac{\partial e^x}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial (e^z + 2x)}{\partial z} - \frac{\partial e^y}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial e^x}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial (e^z + 2x)}{\partial y} \right) \mathbf{k} = e^y \mathbf{i} + e^z \mathbf{j} + e^x \mathbf{k}.$$

Используя $\mathbf{rot\,a}$, формулу Стокса (12.88) можно записать *в векторном виде*

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{a}, \vec{\tau}^0)\, dl = \iint_{S} (\mathbf{rot\,a}, \mathbf{n}^0)\, ds, \qquad (13.26)$$

т. е. *циркуляция векторного поля* $\mathbf{a}$ *вдоль замкнутого контура* Γ *равна потоку ротора этого поля через поверхность* S, *краем которой является* Γ.

В определении $\mathbf{rot\,a}$ (13.24) явно присутствует декартова система координат. Дадим теперь *инвариантное*, т. е. не зависящее от системы координат, определение ротора.

Пусть S — ориентированная плоская площадка с вектором нормали $\mathbf{n}^0$, а Γ — ее край с указанным на нем направлением обхода. Найдем отношение циркуляции вектора $\mathbf{a}$ к площади s площадки: $\oint\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}, \vec{\tau}^0)\, dl/s$. Оно характеризует среднюю плотность циркуляции в единице площади. Предел этого отношения при стягивании площадки S в некоторую точку $M \in S$ называется *плотностью циркуляции* $C(M)$ поля $\mathbf{a}$ в точке M в направлении $\mathbf{n}^0$.

Итак, плотность циркуляции

$$C(M) = \lim_{S \to M} \frac{\oint\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}, \vec{\tau}^0)\, dl}{s}. \tag{13.27}$$

Применив формулу Стокса к правой части равенства (13.27), получим

$$C(M) = \lim_{S \to M} \frac{\iint\limits_{S} (\mathbf{rot}\, \mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, ds}{s}.$$

Отсюда по теореме о среднем для поверхностных интегралов пределе находим

$$C(M) = \lim_{M_1 \to M} \frac{(\mathbf{rot}\, \mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\,|_{M_1} s}{s} = (\mathbf{rot}\, \mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\,|_M,$$

где M_1 — некоторая «средняя» точка из S. Но $(\mathbf{rot}\, \mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = \mathrm{пр}_{\mathbf{n}^0} \mathbf{rot}\, \mathbf{a}$. Таким образом, $C(M) = \mathrm{пр}_{\mathbf{n}^0} \mathbf{rot}\, \mathbf{a}$, т. е. *проекция* $\mathbf{rot}\, \mathbf{a}$ *на направление нормали* $\mathbf{n}^0$ *к площадке* S *численно равна плотности циркуляции вектора* $\mathbf{a}$ *в данной точке* M *в направлении* $\mathbf{n}^0$. В этом и состоит *инвариантное определение ротора.*

Выясним физический смысл ротора на примере поля скоростей точки, вращающейся вокруг некоторой оси. Из механики известно, что линейная скорость $\mathbf{v}$ связана с угловой скоростью вращения $\vec{\omega}$ следующим образом: $\mathbf{v} = [\vec{\omega}, \mathbf{r}]$, где $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ — вектор постоянной угловой скорости; $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки $M = (x, y, z)$. Имеем

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z\omega_y - y\omega_z,\ x\omega_z - z\omega_x,\ y\omega_x - x\omega_y).$$

Отсюда

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z\omega_y - y\omega_z & x\omega_z - z\omega_x & y\omega_x - x\omega_y \end{vmatrix} = 2(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = 2\vec{\omega}.$$

Таким образом, ротор скорости $\mathbf{v}$ вращающейся вокруг оси точки отличен от нуля и равен удвоенной угловой скорости вращения $\vec{\omega}$. Следовательно, отличный от нуля вектор $\mathbf{rot}\, \mathbf{a}$ свидетельствует о вращении векторного поля $\mathbf{a}$.

Отметим некоторые свойства $\mathbf{rot}\,\mathbf{a}$.

1°. $\mathbf{rot}\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{rot}\,\mathbf{a} + \mathbf{rot}\,\mathbf{b}$.

2°. $\mathbf{rot}\,\mathbf{c} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

3°. $\mathbf{rot}\,(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\,\mathbf{rot}\,\mathbf{a} + [\mathbf{grad}\,\varphi,\ \mathbf{a}]$, (13.28)

где $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — скалярная функция.

Свойства 1°, 2° очевидны. Докажем свойство 3°. Получим проекцию $\mathbf{rot}\,(\varphi\mathbf{a})$ на ось X:

$$\mathbf{rot}_X(\varphi\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial y}(\varphi R) - \frac{\partial}{\partial z}(\varphi Q) = R\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad \frac{\partial R}{\partial y} - Q\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \varphi\frac{\partial Q}{\partial z} =$$

$$= \varphi\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \left(R\frac{\partial\varphi}{\partial y} - Q\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \varphi\,\mathbf{rot}_X\,\mathbf{a} + [\mathbf{grad}\,\varphi,\ \mathbf{a}]_X.$$

Аналогично проверяются равенства:

$$\mathbf{rot}_Y(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\,\mathbf{rot}_Y\,\mathbf{a} + [\mathbf{grad}\,\varphi,\ \mathbf{a}]_Y;$$
$$\mathbf{rot}_Z(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\,\mathbf{rot}_Z\,\mathbf{a} + [\mathbf{grad}\,\varphi,\ \mathbf{a}]_Z, \qquad (13.29)$$

что и доказывает справедливость формулы (13.28).

13.4. СОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

Соленоидальное поле и его свойство. Векторное поле $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ *соленоидально* или *трубчато* в некоторой области V, если

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a}\,(M) = 0,\ \forall M \in V. \qquad (13.30)$$

Равенство (13.30) называется *условием соленоидальности* поля $\mathbf{a}$. Соленоидальное поле характеризуется тем, что не имеет в области ни источников, ни стоков.

Из формулы Остроградского

$$\iint_S (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,ds = \iiint_V \mathrm{div}\,\mathbf{a}\,dxdydz$$

и условия (13.30) следует, что поле $\mathbf{a}$ соленоидально тогда и только тогда, когда поток вектора $\mathbf{a}$ через любую замкнутую поверхность S равен нулю.

Для соленоидальных полей справедлив *принцип сохранения интенсивности векторной трубки*: в соленоидальном поле потоки векторного поля через различные сечения векторной трубки равны между собой.

Рассмотрим два сечения S_1 и S_2 векторной трубки (рис. 13.8), которые образуют вместе с боковой поверхностью S_3 замкнутую поверхность S. Вследствие соленоидальности поля $\mathbf{a}$

$$\iint_{S_1} (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,ds + \iint_{S_2} (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,ds +$$

$$+ \iint_{S_3} (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,ds = \iint_S (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,ds =$$

$$= \iiint_V \mathrm{div}\,\mathbf{a}\,dxdydz = 0, \qquad (13.31)$$

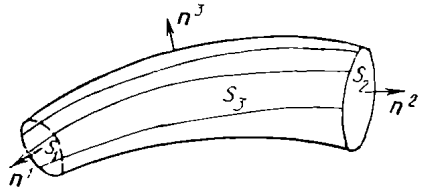


Рис. 13.8

где V — объем, ограниченный поверхностью S.

Но $\iint\limits_{S_3} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, ds = 0$, так как нормаль к боковой поверхности S_3 перпендикулярна к полю $\mathbf{a}$, направленному по касательной к векторной трубке. Изменив направление нормали на одной из поверхностей S_1 или S_2 на противоположное, из равенства (13.31) получим $\iint\limits_{S_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, ds = \iint\limits_{S_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, ds$, т. е., действительно, поток вектора $\mathbf{a}$ через любое сечение векторной трубки имеет одно и то же значение.

С точки зрения гидродинамики этот факт означает следующее: если $\mathbf{a}$ — поле скоростей несжимаемой жидкости, то объем ее, протекающий через любое сечение векторной трубки в единицу времени, один и тот же.

Потенциальные векторные поля. Векторное поле $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ называется *потенциальным* или *безвихревым* в некоторой области V, если

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{a}\,(M) = 0, \quad \forall M \in V. \tag{13.32}$$

Равенство (13.32) называется *условием потенциальности* поля $\mathbf{a}$. Согласно определению ротора (13.24), условие (13.32) равносильно равенствам

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{13.33}$$

Справедлива

Теорема 13.1. Пусть в односвязной области V задано векторное поле $\mathbf{a} = (P, Q, R)$, где P, Q и R — гладкие функции. Для того чтобы поле $\mathbf{a}$ было потенциальным в V, необходимо и достаточно, чтобы существовала дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция $u = u(x, y, z)$, такая, что

$$\mathbf{a} = \mathbf{grad}\, u. \tag{13.34}$$

□ *Необходимость.* Пусть поле $\mathbf{a}$ потенциально в V, т. е. выполнены равенства (13.33). Но, согласно теореме 12.1, их выполнение означает существование функции $u(x, y, z)$, такой, что $\left(P = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q = \frac{\partial u}{\partial y},\ R = \frac{\partial u}{\partial z}\right) \Leftrightarrow (\mathbf{a} = \mathbf{grad}\, u)$.

Достаточность. Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{grad}\, u$. Тогда

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{a} = \mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\, u = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)\mathbf{k} = 0 \tag{13.35}$$

в соответствии с равенством смешанных производных. ■

Функция $u = u(x, y, z)$, удовлетворяющая в области V равенству (13.34), называется *потенциальной функцией* или *потенциалом поля* **a**.

Соотношение (13.34) равносильно трем скалярным равенствам

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R, \tag{13.36}$$

являющимся дифференциальными уравнениями для определения потенциала $u = u(x, y, z)$.

Потенциал поля определяется неоднозначно, с точностью до произвольного слагаемого. В самом деле, если u — потенциал поля, то $\mathbf{a} = \mathbf{grad}\, u = \mathbf{grad}\,(u + C)$, где C — произвольная постоянная, т. е. $u + C$ — тоже потенциал поля **a**.

Пример 1. Проверить потенциальность поля $\mathbf{a} = (2xy + z)\,\mathbf{i} + (x^2 - 2y)\,\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ и найти его потенциал.

□ Имеем $P = 2xy + x$, $Q = x^2 - 2y$, $R = x$. Тогда

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z & x^2 - 2y & x \end{vmatrix} = (0 - 0)\,\mathbf{i} + (1 - 1)\,\mathbf{j} + (2x - 2x)\,\mathbf{k} = 0,$$

т. е. **a** — потенциальное поле. Его потенциал u найдем по равенствам (13.36) из системы

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 2y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x. \tag{13.37}$$

Из последнего уравнения системы (13.37) интегрированием по z получим $u = xz + \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ — некоторая функция, играющая роль константы при интегрировании по z. Найдем ее, используя первые два уравнения системы:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = z + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy + z \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy; \\ &\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 - 2y. \end{aligned}\right\}$$

Итак, функция $\varphi = \varphi(x, y)$ удовлетворяет системе

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 - 2y. \tag{13.38}$$

Из первого уравнения найдем, что $\varphi = x^2y + \psi(y)$, где $\psi(y)$ — некоторая функция. Отсюда с учетом второго уравнения системы (13.38)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + \psi'(y) = x^2 - 2y \Rightarrow \psi'(y) = -2y,$$

т. е. $\psi(y) = -y^2 + C$, где C — произвольная постоянная.

Итак, потенциал

$$u = xz + \varphi(x, y) = xz + x^2y + \psi(y) = xz + x^2y - y^2 + C. \tag{13.39}$$

Так как функции P, Q и R не имеют особенностей в точке (0, 0, 0), потенциал u можно найти по формуле (12.39):

$$u = \int_0^1 ((2txty + tz)\,x + (t^2x^2 - 2ty)\,y + (tx)\,z)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (3x^2yt^2 - 2y^2t + 2xzt)\,dt = (x^2yt^3 - y^2t^2 +$$

$$+ xzt^2)\Big|_{t=0}^{t=1} = x^2y - y^2 + xz,$$

что совпадает с потенциалом (13.39) с точностью до произвольной постоянной.

Криволинейный интеграл в потенциальном поле. Пусть векторное поле $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ потенциально в односвязной области V, т. е. выполнены равенства (13.33). В таком случае, согласно теореме 12.2, справедливо равенство (12.36):

$$\int_l P dx + Q dy + R dz = u(N) - u(M), \qquad (13.40)$$

где u — потенциал поля $\mathbf{a}$; M, N — соответственно начальная и конечная точки кривой $l \in V$. Отсюда следует, что если l — замкнутый контур, циркуляция вектора $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ по нему всегда равна нулю. Верно и обратное: если циркуляция вектора $\mathbf{a}$ по любому замкнутому контуру $l \in V$ равна нулю, поле $\mathbf{a}$ потенциально в V, что следует из равенства (13.40) и формулы Стокса.

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл в поле вектора $\mathbf{a} = (yz + 1) \times \mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ вдоль отрезка прямой, соединяющей точки $O = (0, 0, 0)$ и $N = (1, 2, 3)$.

□ 1-й способ. Убедившись, что поле $\mathbf{a}$ потенциально, найдем его потенциал по формуле (12.39):

$$u = \int_0^1 ((tytz + 1)\,x + txtzy + txtyz)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (3xyzt^2 + x)\,dt = xyz + x.$$

Тогда по выражению (13.40)

$$\int_O^N (yz + 1)\,dx + xzdy + xydz = u(N) - u(O) = (1 \cdot 2 \cdot 3 + 1) - 0 = 7.$$

2-й способ. Составим параметрические уравнения отрезка ON: $x = t$, $y = 2t$, $z = 3t$, $t \in [0, 1]$. По формуле (12.19)

$$\int_O^N (yz + 1)\,dx + xzdy + xydz = \int_0^1 (18t^2 + 1)\,dt = 7.$$

13.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Оператор Гамильтона*. Введем символический вектор «набла»

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad (13.41)$$

* У. Гамильтон (1805—1865) — английский математик и механик.

называемый *оператором Гамильтона*. Его действие на скалярную функцию u определяется по правилу

$$\nabla u = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u = \mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \mathbf{grad}\, u,$$

т. е.

$$\nabla u = \mathbf{grad}\, u. \tag{13.42}$$

Пусть $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ — векторная функция. Тогда

$$(\nabla, \mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

т. е.

$$(\nabla, \mathbf{a}) = \operatorname{div}\mathbf{a}. \tag{13.43}$$

Далее,

$$[\nabla, \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \mathbf{rot}\,\mathbf{a},$$

т. е.

$$[\nabla, \mathbf{a}] = \mathbf{rot}\,\mathbf{a}. \tag{13.44}$$

Оператор ∇ не является вектором в классическом понимании этого слова. Наряду с векторной «набла» имеет и дифференциальную природу. Если оператор ∇ действует на произведение, необходимо применять его к каждому сомножителю отдельно, считая другой сомножитель постоянным. Затем, пользуясь правилами векторной алгебры, следует преобразовать каждое слагаемое так, чтобы оператор ∇ стоял перед последним сомножителем. Например:

$$\nabla(u,v) = u\nabla v + v\nabla u = u\,\mathbf{grad}\, v + v\,\mathbf{grad}\, u = \mathbf{grad}\,(uv);$$

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{a}) = (\vec{\nabla}, \varphi\mathbf{a}) = (\nabla\varphi, \mathbf{a}) + (\varphi\nabla, \mathbf{a}) = (\mathbf{grad}\,\varphi, \mathbf{a}) + \\ + \varphi(\nabla, \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div}\mathbf{a} + (\mathbf{a}, \mathbf{grad}\,\varphi);$$

что соответствует формуле (13.20).

Далее,

$$\mathbf{rot}(\varphi\mathbf{a}) = [\nabla, \varphi\mathbf{a}] = [\nabla\varphi, \mathbf{a}] + [\varphi\nabla, \mathbf{a}] = \\ = [\nabla\varphi, \mathbf{a}] + \varphi[\nabla, \mathbf{a}] = [\mathbf{grad}\,\varphi, \mathbf{a}] + \varphi\,\mathbf{rot}\,\mathbf{a},$$

что соответствует формуле (13.28).

Пример 1. Доказать справедливость формулы:

$$\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \mathbf{rot}\,\mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \mathbf{rot}\,\mathbf{b}).$$

□ Имеем

$$\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}_c]) + (\nabla, [\mathbf{a}_c, \mathbf{b}]), \tag{13.45}$$

где индекс c означает, что данный сомножитель считается постоянным, т. е. на него «набла» не действует.

Используя правило циклической перестановки сомножителей в смешанном

произведении, преобразуем правую часть равенства (13.45) так, чтобы все постоянные величины оказались перед ∇:

$$\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}_c, [\nabla, \mathbf{a}]) - (\nabla, [\mathbf{b}, \mathbf{a}_c]) =$$
$$= (\mathbf{b}_c, [\nabla, \mathbf{a}]) - (\mathbf{a}_c, [\nabla, \mathbf{b}]) = (\mathbf{b}, [\nabla, \mathbf{a}]) - (\mathbf{a}, [\nabla, \mathbf{b}]) =$$
$$= (\mathbf{b}, \operatorname{rot}\mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot}\mathbf{b}).$$

Дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа. Пусть $u = u(x, y, z)$ — скалярное поле, а $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ — векторное поле. Предполагаем, что функции u, P, Q и R достаточное число раз непрерывно дифференцируемы. К дифференциальным операциям второго порядка относятся следующие: $\operatorname{div}\mathbf{grad}\,u$, $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,u$, $\mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}$, $\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\mathbf{a}$, $\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{a}$.

С помощью оператора «набла» их можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{div}\mathbf{grad}\,u = (\nabla, \nabla u); \\ \mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,u = [\nabla, \nabla u]; \\ \mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla(\nabla, \mathbf{a}); \\ \operatorname{div}\mathbf{rot}\,\mathbf{a} = (\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]); \\ \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{a} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]]. \end{array}\right\} \qquad (13.46)$$

Оператором Лапласа (лапласианом) Δ называется оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Применив его к скалярной функции u, получим

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Оператор Лапласа Δ символически можно получить как скалярный квадрат оператора ∇:

$$\nabla^2 = (\nabla, \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta.$$

Получим явные выражения некоторых дифференциальных операций второго порядка (13.46):

$$\operatorname{div}\mathbf{grad}\,u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u.$$

Итак,

$$\Delta u = \operatorname{div}\mathbf{grad}\,u. \qquad (13.47)$$

Далее, согласно равенству смешанных производных,

$$\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \equiv 0.$$

Итак,

$$\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\mathbf{a}\equiv 0. \tag{13.48}$$

Ранее получено [см. формулу (13.35)], что $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,u\equiv 0$.

Уравнение $\Delta u=0$ называется *уравнением Лапласа*. Оно используется при описании различных установившихся процессов, например установившегося движения несжимаемой жидкости и др. Функция $u=u(x,\ y,\ z)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется *гармонической*.

Криволинейные ортогональные координаты в пространстве. Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ введена прямоугольная декартова система координат XYZ. Свяжем ее с системой криволинейных координат UVW. Пусть между прямоугольными координатами x, y, z и криволинейными u, v, w установлено взаимно однозначное соответствие вида

$$x=x(u,\ v,\ w);\ y=y(u,\ v,\ w);\ z=z(u,\ v,\ w); \tag{13.49}$$

$$u=u(x,\ y,\ z);\ v=v(x,\ y,\ z);\ w=w(x,\ y,\ z). \tag{13.50}$$

Уравнения $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ и $w=\text{const}$ представляют собой уравнения координатных поверхностей криволинейной системы в прямоугольной системе координат. Каждая пара координатных поверхностей, проходящих через фиксированную точку, образует в пересечении координатную линию.

Ограничимся простейшим случаем криволинейной ортогональной системы координат, т. е. такой, что в любой точке три координатные линии, проходящие через нее, ортогональны между собой.

Возьмем точки $M=(u,\ v,\ w)$ и $M_1=(u+du,\ v,\ w)$ в пространстве UVW (рис. 13.9). Длина ребра MM_1 в этом пространстве равна du. Согласно равенству (13.49), точкам M и M_1 в пространстве XYZ отвечают точки

$$N=(x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w))$$

и

$$N_1=(x(u+du,\ v,\ w),\ y(u+du,\ v,\ w),\ z(u+du,\ v,\ w))=$$
$$=\left(x+\frac{\partial x}{\partial u}du,\ y+\frac{\partial y}{\partial u}du,\ z+\frac{\partial z}{\partial u}du\right).$$

Отсюда длина dl_1 ребра NN_1 в пространстве XYZ

$$dl_1=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,du. \tag{13.51}$$

Итак, при смещении точки M в бесконечно близкую точку M_1 параллельно оси U образ NN_1 отрезка MM_1 в пространстве XYZ имеет длину (13.51).

Аналогично при смещении точки $M=(u,v,w)$ в точку $M_2=(u,v+dv,\ w)$

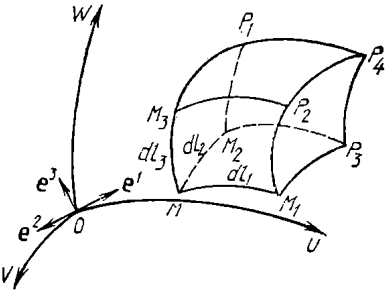


Рис. 13.9

в пространстве XYZ получим образ NN_2 ребра MM_2, имеющий длину

$$dl_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\, dv. \tag{13.52}$$

Если точка $M = (u, v, w)$ смещается в точку $M_3 = (u, v, w + dw)$, то соответствующий образ NN_3 в пространстве XYZ имеет длину

$$dl_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}\, dw. \tag{13.53}$$

Коэффициенты

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2}; \\ H_2 &= \sqrt{x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2}; \\ H_3 &= \sqrt{x_w'^2 + y_w'^2 + z_w'^2} \end{aligned}\right\} \tag{13.54}$$

называются *коэффициентами Ламе**.

Таким образом, формулы (13.51)—(13.53) можно записать в виде

$$dl_1 = H_1 du;\ dl_2 = H_2 dv;\ dl_3 = H_3 dw. \tag{13.55}$$

Вследствие ортогональности системы координат площадь грани $MM_2P_1M_3$ есть $ds_1 = dl_2 dl_3 = H_2 H_3 dv dw$. Аналогично площади граней $MM_1P_2M_3$ и $MM_1P_3M_2$ соответственно $ds_2 = H_3 H_1 du dw$, $ds_3 = H_1 H_2 du dv$.

Объем рассматриваемого бесконечно малого параллелепипеда

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3 = H_1 H_2 H_3 du dv dw.$$

Найдем коэффициенты Ламе в цилиндрической и сферической системах координат:

в цилиндрической системе координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Полагая $u = \rho$, $v = \varphi$, $w = z$, согласно равенству (13.54), получаем:

$$H_1 = 1;\ H_2 = \rho;\ H_3 = 1; \tag{13.56}$$

в сферической системе координат $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$. Полагая $u = r$, $v = \theta$, $w = \varphi$, из равенств (13.54) имеем:

$$H_1 = 1;\ H_2 = r;\ H_3 = r\sin\theta. \tag{13.57}$$

Градиент в ортогональных криволинейных координатах. Известно, что производная функции $f = f(u, v, w)$ по некоторому направлению равна проекции $\mathbf{grad}\, f$ на это направление. Из этого следует, что координаты $\mathbf{grad}\, f$ в базисе $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ равны производным от f по направлениям этих векторов. Пусть $\Delta f = f(M_1) - f(M)$. Тогда

* Г. Ламе (1795—1870) — французский математик.

$$(\mathbf{grad}\, f,\ \mathbf{e}^1) = \lim_{\Delta l_1 \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta l_1} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f}{H_1 \Delta u} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Аналогично

$$(\mathbf{grad}\, f,\ \mathbf{e}^2) = \frac{1}{H_2} \frac{\partial f}{\partial v};\quad (\mathbf{grad}\, f,\ \mathbf{e}^3) = \frac{1}{H_3} \frac{\partial f}{\partial w}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{grad}\, f = \frac{1}{H_1} \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{e}^1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{e}^2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial f}{\partial w} \mathbf{e}^3. \tag{13.58}$$

В цилиндрической системе координат $\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}^2 = \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_z$. Согласно формуле (13.56), из равенства (13.58) получаем

$$\mathbf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z. \tag{13.59}$$

В сферической системе координат $\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}^2 = \mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_\varphi$. Тогда в соответствии с формулой (13.57) из равенства (13.58)

$$\mathbf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi. \tag{13.60}$$

Дивергенция в ортогональных криволинейных координатах. Пусть в системе координат UVW задано векторное поле $\mathbf{a} = (P, Q, R) = P\mathbf{e}^1 + Q\mathbf{e}^2 + R\mathbf{e}^3$. По определению,

$$\operatorname{div} \mathbf{a}\,(M) = \lim_{V \to M} \frac{\iint\limits_S (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\, ds}{v},$$

где v — объем области V; S — поверхность, его ограничивающая. В качестве V возьмем криволинейный параллелепипед (рис. 13.9) объемом $v = H_1 H_2 H_3 du dv dw$. Вычислим поток вектора $\mathbf{a}$ через две грани, перпендикулярные к ребру MM_1. Внешняя нормаль к грани $MM_2P_1M_3$ совпадает с вектором $-\mathbf{e}^1$. Следовательно, с точностью до бесконечно малых первого порядка относительно v поток вектора $\mathbf{a}$ через эту грань

$$(\mathbf{a},\ -\mathbf{e}^1)\, ds_1 = -PH_2H_3 du dw. \tag{13.61}$$

На противоположной грани $M_1P_3P_4P_2$ первая криволинейная координата равна $u + du$. Следовательно, произведение PH_2H_3 на этой грани отличается от его значения на грани $MM_2P_1M_3$ на приращение $\frac{\partial}{\partial u}(PH_2H_3)\, du$. Направление нормали к грани $M_1P_3P_4P_2$ совпадает с направлением вектора $\mathbf{e}^1$. Поэтому поток вектора $\mathbf{a}$ через эту грань равен

$$\left(PH_2H_3 + \frac{\partial}{\partial u}(PH_2H_3)\right) du dw. \tag{13.62}$$

Суммируя равенства (13.61) и (13.62), получаем, что поток вектора $\mathbf{a}$ через параллельные грани $MM_2P_1M_3$ и $M_1P_3P_4P_2$ равен

$$\frac{\partial}{\partial u}(PH_2H_3)\,dudvdw. \tag{13.63}$$

Для двух других пар параллельных между собой граней аналогичным образом получаем выражения для потока вектора **a** через эти пары граней:

$$\frac{\partial}{\partial v}(QH_3H_1)\,dudvdw;\quad \frac{\partial}{\partial w}(RH_1H_2)\,dudvdw. \tag{13.64}$$

Складывая величины (13.63) и (13.64) и деля на $v = dudvdw$, получим

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial(PH_2H_3)}{\partial u} + \frac{\partial(QH_1H_3)}{\partial v} + \frac{\partial(RH_1H_2)}{\partial w}\right). \tag{13.65}$$

Для цилиндрической системы координат в соответствии с равенствами (13.56) и (13.65) имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho P)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial Q}{\partial\varphi} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{13.66}$$

Для сферической системы координат в соответствии с равенствами (13.57) и (13.65) получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2P)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(Q\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial R}{\partial\varphi}. \tag{13.67}$$

Оператор Лапласа в криволинейных координатах. Так как

$$\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

и, согласно равенствам (13.54), $dx = H_1du$, $dy = H_2dv$, $dz = H_3dw$, то

$$\Delta f = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{H_1\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{H_2\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{H_3\partial w}\mathbf{k}\right). \tag{13.68}$$

Обозначим $P = \frac{1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial u}$, $Q = \frac{1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial v}$, $R = \frac{1}{H_3}\frac{\partial f}{\partial w}$. Тогда с учетом равенств (13.65) и (13.68) получаем *выражение оператора Лапласа в криволинейных координатах*:

$$\Delta f = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right). \tag{13.69}$$

В цилиндрической системе координат, согласно равенствам (13.56) и (13.69), имеем

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{13.70}$$

В частности, в полярных координатах (координата z отсутствует) из равенства (13.70) получаем выражение для оператора Лапласа в виде

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}. \tag{13.71}$$

В сферической системе координат, согласно равенствам (13.57) и (13.69), имеем

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \\ + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}. \qquad (13.72)$$

Ротор в цилиндрической и сферической системах координат. Приведем без вывода формулы для ротора.

В цилиндрической системе координат

$$\mathbf{rot\,a} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\varphi} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \\ + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho Q)}{\partial\rho} - \frac{\partial P}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_z. \qquad (13.73)$$

В сферической системе координат

$$\mathbf{rot\,a} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(R\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial Q}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_r + \\ + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial P}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rR)}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\theta)}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi. \qquad (13.74)$$

14. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

14.1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Уравнение колебаний струны. Будем считать струной тонкую упругую нить, не сопротивляющуюся на изгиб. Предполагаем, что сила натяжения T_0, действующая на нее, значительна. Силой же тяжести струны по сравнению с натяжением T_0 пренебрегаем. Предполагаем, что смещения струны лежат в одной плоскости XU и что в положении равновесия струна направлена вдоль оси X и занимает отрезок $[0, l]$.

Рассмотрим малые поперечные колебания этой струны. Обозначим через $u(x, t)$, $x \in [0, l]$, отклонение струны от положения равновесия в момент времени t (рис. 14.1). Функция $u(x, t)$, $x \in [0, l]$, в момент времени t определяет форму (профиль) струны, а производная $\dfrac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ характеризует деформацию струны в точке x в момент t.

Вследствие малости колебаний струны пренебрегаем величинами высшего порядка малости по сравнению с $\dfrac{\partial u(x, t)}{\partial x}$. При таких колебаниях удлинения участков струны не происходит. Действительно, выделим участок $[l_1, l_2] \subset [0, l]$ струны, длина которого в положении равновесия (при $t = 0$) $s = l_2 - l_1$. Длина же s' этого участка в момент времени t, согласно формуле (5.98), ч. II, вследствие допущения о малости $u_x'^2$

$$s' = \int_{l_1}^{l_2} \sqrt{1 + u_x'^2}\, \approx \int_{l_1}^{l_2} dx = s.$$

Так как удлинения участков струны не происходит, то по закону Гука* натяжение T в каждой точке струны не изменяется во времени.

Убедимся, что это натяжение не зависит от x. Рассмотрим участок AB струны (рис. 14.1). На этот участок действуют силы натяжения, направленные по касательным к струне в точках A и B, внешние (вынуждающие) силы и силы инерции. Так как колебания поперечные, то внешние силы и силы инер-

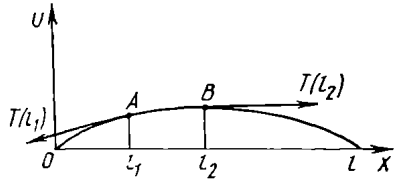


Рис. 14.1

* Р. Гук (1635—1703) — английский физик.

ции параллельны оси U. Сумма проекций всех этих сил на ось X очевидно равна нулю, т. е.

$$T(l_2)\cos\alpha(l_2) - T(l_1)\cos\alpha(l_1) = 0, \tag{14.1}$$

где $\alpha(x)$ — угол между касательной к кривой $u(x,t)$ в точке с абсциссой x и осью X в момент времени t. Но

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x'^2}} \approx 1$$

вследствие малости $u_x'^2$. В таком случае из равенства (14.1) имеем $T(l_1) \approx T(l_2)$, т. е. натяжение T не зависит от x и потому его можно считать постоянным и равным T_0.

Для вывода уравнения колебаний струны воспользуемся *принципом Д'Аламбера:* сумма всех сил, действующих на участок струны, включая силы инерции, равна нулю.

Спроецируем все силы на ось U. Сумма проекций на эту ось сил натяжения вследствие малости колебаний

$$\begin{aligned}
T_0(\sin\alpha(l_2) - \sin\alpha(l_1)) &= T_0(\sin\alpha(x)|_{x=l_2} - \sin\alpha(x)|_{x=l_1}) = \\
&= T_0\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x)}}\Big|_{x=l_2} - \frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x)}}\Big|_{x=l_1}\right) = \\
&= T_0\left(\frac{u_x'}{\sqrt{1+u_x'^2}}\Big|_{x=l_2} - \frac{u_x'}{\sqrt{1+u_x'^2}}\Big|_{x=l_1}\right) \approx \\
&\approx T_0\left(u_x'|_{x=l_2} - u_x'|_{x=l_1}\right) = T_0\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx.
\end{aligned} \tag{14.2}$$

Пусть $g(x,\ t)$ — внешняя сила, рассчитанная на единицу длины струны и действующая параллельно оси U. Тогда проекцию этой силы на ось U на участке $[l_1,\ l_2]$ можно выразить интегралом

$$\int_{l_1}^{l_2} g(x,\ t)\,dx. \tag{14.3}$$

Если $\rho(x)$ — линейная плотность струны, то сила инерции на участке $[l_1,\ l_2]$ равна

$$-\int_{l_1}^{l_2}\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx. \tag{14.4}$$

В соответствии с принципом Д'Аламбера условие равновесия сил (14.2)—(14.4) принимает вид

$$\int_{l_1}^{l_2}\left(T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g(x,\ t)\right)dx = 0. \tag{14.5}$$

Вследствие произвольности l_1 и l_2 из $[0, l]$ равенство (14.5) будет выполнено, если подынтегральное выражение равно нулю в любой момент времени t и при любом $x \in [0, l]$, т. е. если

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t). \tag{14.6}$$

Соотношение (14.6) и есть искомое *уравнение малых поперечных колебаний струны* (вынужденных).

Если струна однородна, т. е. $\rho(x) = \rho = \text{const}$, уравнение (14.6) можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{14.7}$$

где $a^2 = T_0/\rho$; $f(x, t) = g(x, t)/\rho$.

При отсутствии внешних сил $g(x, t)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{14.8}$$

является *уравнением свободных колебаний однородной струны.*

Уравнение теплопроводности. Рассмотрим в $\mathbf{R}^3$ с декартовой системой координат XYZ твердое тело V. Пусть температура этого тела в любой точке x, y, z в момент времени t определяется функцией $u(x, y, z, t)$. Тогда производные u'_x, u'_y, u'_z характеризуют скорость изменения температуры в момент времени t в направлении осей X, Y и Z соответственно. Тело V предполагается изотропным, т. е. его тепловые свойства не зависят от направления. Известно, что теплота переходит из более нагретых мест в менее нагретые. Обозначим α коэффициент теплопроводности тела, а c — его удельную теплоемкость. Эти величины будем считать постоянными.

Выделим элементарный кубик ΔV (рис. 14.2) в теле V и составим для него *уравнение теплового баланса.*

Количество теплоты, проходящей через переднюю грань кубика ΔV в положительном направлении оси X за время Δt, с точностью до бесконечно малых высшего порядка равно $\alpha\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x}\Delta y \times$ $\times \Delta z \Delta t$, где $\Delta y \Delta z$ — площадь передней грани кубика (предполагается, что в пределах этой грани производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ не меняется).

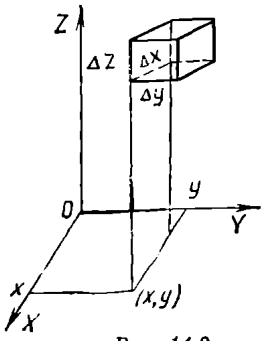


Рис. 14.2

Аналогично количество теплоты, проходящей через заднюю грань в положительном направлении оси X, равно $\alpha\frac{\partial u(x + \Delta x, y, z, t)}{\partial x} \times$ $\times \Delta y \Delta z \Delta t$. Отсюда количество теплоты ΔQ_x, вошедшей в кубик через заднюю и переднюю грани за время Δt,

$$\Delta Q_x = \alpha \frac{\partial u(x+\Delta x,\ y,\ z,\ t)}{\partial x} \Delta y \Delta z \Delta t - \alpha \frac{\partial u(x,\ y,\ z,\ t)}{\partial x} \Delta y \Delta z \Delta t \approx$$

$$\approx \alpha \frac{\partial^2 u(x,\ y,\ z,\ t)}{\partial x^2} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t.$$

Рассуждая подобным образом, получим, что количество теплоты ΔQ_y и ΔQ_z, вошедшее в кубик через левую и правую, нижнюю и верхнюю грани, приближенно

$$\Delta Q_y = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Delta y \Delta x \Delta z \Delta t;\ \Delta Q_z = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Delta z \Delta x \Delta y \Delta t.$$

Тогда общее количество теплоты ΔQ, вошедшей в кубик ΔV за время Δt, приближенно

$$\Delta Q = \Delta Q_x + \Delta Q_y + \Delta Q_z =$$

$$= \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t. \qquad (14.9)$$

По закону сохранения тепловой энергии в кубике ΔV это количество теплоты равно произведению удельной теплоемкости c, скорости изменения температуры $\frac{\partial u}{\partial t}$, объема кубика $\Delta x \Delta y \Delta z$ и времени Δt, т. е. $\Delta Q = c \frac{\partial u}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$. Отсюда и из равенства (14.9) получаем

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = c \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Обозначив $a^2 = \alpha/c$, приведем последнее равенство к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = a^2 \Delta u. \qquad (14.10)$$

Это соотношение и есть искомое *уравнение теплопроводности твердого изотропного тела.*

Уравнение (14.10) получено в предположении, что внутри тела отсутствуют тепловые источники. Если же плотность тепловых источников (количество поглощенной или выделенной теплоты за единицу времени в единице объема тела) в теле V равна $F(x, y, z, t)$, то уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,\ y,\ z,\ t), \qquad (14.11)$$

где $f(x, y, z, t) = F(x, y, z, t)/(\alpha c)$.

Если тело V одномерно, например является тонким стержнем, расположенным вдоль оси X, то уравнения (14.10) и (14.11) приобретают соответственно вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad (14.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,\ t), \qquad (14.13)$$

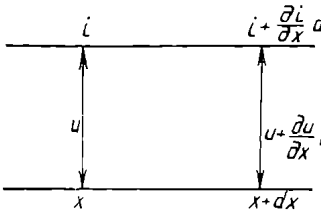


Рис. 14.3

где $u = u(x, t)$ — температура стержня в точке x в момент времени t.

Заметим, что уравнения (14.10)—(14.13) получены при условии отсутствия теплового обмена между поверхностью тела и внешней средой.

Телеграфные уравнения. Рассмотрим длинную однородную электрическую линию (цепь), сопротивление R, индуктивность L, утечка G и емкость C которой распределены вдоль провода непрерывно и равномерно и рассчитаны на единицу длины. Для простоты будем считать линию двухпроводной (рис. 14.3). Обозначим напряжение между проводами в момент времени t на расстоянии x от некоторого фиксированного начала через $u = u(x, t)$, а ток — через $i = i(x, t)$. Напомним, что коэффициент самоиндукции L связан с ЭДС самоиндукции u_c соотношением $u_c = L\frac{\partial i}{\partial t}$; ток смещения $i_{см}$ и напряжение между проводами — формулой $i_{см} = C\frac{\partial u}{\partial t}$ (два провода можно рассматривать как конденсатор), а коэффициент утечки G с током утечки i_y и напряжением — соотношением $i_y = Gu$.

Выделим участок провода $[x, x + dx]$. Тогда в момент времени t ток и напряжение в точке $x + dx$ приближенно равны $i + \frac{\partial i}{\partial x}dx$ и $u + \frac{\partial u}{\partial x}dx$ соответственно. Падение напряжения на участке $[x, x + dx]$ провода, вызванное падением его на сопротивлении Rdx, т. е. величиной $iRdx$, и возникновением ЭДС самоиндукции $Ldx\frac{\partial i}{\partial t}$, равно

$$u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) = iRdx + L\frac{\partial i}{\partial t}dx.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x} + Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} = 0. \tag{14.14}$$

Изменение же тока на участке $[x, x + dx]$, вызванное токами утечки и смещения,

$$i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x}dx\right) = Gudx + C\frac{\partial u}{\partial t}dx,$$

откуда

$$\frac{\partial i}{\partial x} + Gu + C\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{14.15}$$

(напомним, что величины R, L, G, C рассчитаны на единицу длины).

Система соотношений (14.14) и (14.15) называется *системой телеграфных уравнений* относительно u и i. Из этой системы методом исключения можно получить одно уравнение относительно u или i. Продифференцируем, например, уравнение (14.14) по x, а уравнение (14.15) по t:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R\frac{\partial i}{\partial x} + L\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = 0; \\ &\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} + G\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{14.16}$$

Выразив $\frac{\partial i}{\partial x}$ из уравнения (14.15), а $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$ из второго уравнения системы (14.16) и подставив их в первое уравнение системы (14.16), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{RC + LG}{LC}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{RG}{LC}u - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{14.17}$$

Уравнение (14.17) также называется *телеграфным*.

Замечание. Уравнения колебаний струны, теплопроводности, телеграфные получены при ряде допущений механического и геометрического характера. Подобное положение имеет место и при выводе уравнений в других задачах математической физики. Получающиеся при этом дифференциальные уравнения в частных производных являются результатом идеализации и хорошо описывают рассматриваемый физический процесс только при определенных условиях.

Упражнение. Исключив функцию u из системы (14.16), показать, что ток i удовлетворяет телеграфному уравнению

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{RC + LG}{LC}\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{RG}{LC}i - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0. \tag{14.18}$$

14.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Общие сведения об уравнениях с частными производными. Уравнение

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}\right) = 0, \tag{14.19}$$

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m,$$

связывающее искомую неизвестную функцию $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ и ее частные производные, называется *дифференциальным уравнением с частными производными* или *дифференциальным уравнением в частных производных*. Здесь F — известная функция своих аргументов. Наивысший порядок частных производных, входящих в уравнение (14.19), называется *порядком* этого уравнения. Например, уравнения (14.8) и (14.10) — уравнения второго порядка. Решением уравнения (14.19) в некоторой области D называется любая функция $u = u(\mathbf{x}, t)$, необходимое число раз дифференцируемая и обращаю-

щая его в тождество. Уравнение (14.19) называется линейным, если неизвестная функция u и ее частные производные входят в него линейным образом. Примерами могут служить уравнения колебаний струны, теплопроводности и телеграфные.

Пример 1. Решением уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, где $u = u(x, y, z)$, является любая функция вида $u = f(y, z)$, где f — произвольная гладкая функция.

Пример 2. Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, где $u = u(x, y)$.

□ Уравнение $u''_{xy} = 0$ равносильно уравнению $\left(u'_y\right)'_x = 0$, из которого следует, что производная u'_y зависит только от y, т. е. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = g(y)$, где $g(y)$ — некоторая произвольная функция. Отсюда $u = \int g(y)\, dy + F(x) = G(y) + F(x)$, где $F(x)$ — произвольная функция, зависящая только от x, а $G(y) = \int g(y)\, dy$.

Таким образом, решением уравнения $u''_{xy} = 0$ является любая функция вида $u = G(y) + F(x)$, где $G(y)$ и $F(x)$ — произвольные дифференцируемые функции. Это решение называется общим.

Пример 3. Решить уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, где $u = u(x, y)$.

□ Сделаем замену $t = x + y$, $s = x - y$, откуда $x = (t + s)/2$, $y = (t - s)/2$. Тогда

$$u = u(x, y) = u\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2}\right) = v(t, s) = v(t(x, y), s(x, y)).$$

Дифференцируя сложную функцию $v(t(x, y), s(x, y))$ по цепочному правилу, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial s}.$$

Отсюда в соответствии с уравнением $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ имеем $\dfrac{\partial v}{\partial s} = 0$. Решением $v(t, s)$ последнего уравнения является произвольная дифференцируемая функция вида $v(t) = v(x + y)$.

Постановка задач для уравнений математической физики. Дифференциальные уравнения в частных производных, как и обыкновенные дифференциальные уравнения, имеют, как правило, бесчисленное множество решений, которые зависят от некоторых произвольных функций (примеры 1—3 подтверждают это). Всякий физический процесс описывается некоторым дифференциальным уравнением в частных производных. Однако для полного описания процесса одного дифференциального уравнения недостаточно, нужны некоторые дополнительные условия.

Опишем дополнительные условия для полученных выше уравнений колебаний струны, теплопроводности и телеграфного.

Уравнение колебаний струны. Пусть струна закрепле-

на в точках $x = 0$ и $x = l$ оси X. Естественно потребовать тогда от решения $u(x, t)$ уравнения (14.6) выполнения равенств:

$$u(x, t)|_{x=0} = u(0, t) = 0; \; u(x, t)|_{x=l} = u(l, t) = 0. \qquad (14.20)$$

Равенства (14.20) называются *граничными* или *краевыми условиями* для уравнения колебаний закрепленной струны. Если оба конца струны (или один из них) не закреплены, а движутся по определенным законам, граничные условия (14.20) будут иметь вид:

$$u(0, t) = f_1(t); \; u(l, t) = f_2(t), \qquad (14.21)$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — заданные функции времени t, $t \geqslant 0$.

Помимо задания граничных условий (14.20) или (14.21), для струны необходимо знать также значения функции $u(x, t)$ и ее скорости $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ в начальный момент времени $t = 0$:

$$u(x, t)|_{t=0} = u(x, 0) = f(x), \; 0 \leqslant x \leqslant l;$$
$$\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = u'_t(x, 0) = \mathrm{F}(x), \; 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad (14.22)$$

где $f(x)$, $\mathrm{F}(x)$ — заданные функции.

Условия (14.22) называются *начальными условиями*.

Граничных условий (14.20) или (14.21) и начальных условий (14.22) достаточно для определения единственного решения уравнения колебаний струны.

Уравнение теплопроводности. Для тела V граничные условия определяются на его поверхности. Поскольку вдоль поверхности S тело V граничит с окружающей средой, то в каждой точке S необходимо задать либо температуру u, либо тепловой поток $\partial u/\partial n$ ($\mathbf{n}$ — нормаль к S), либо теплообмен (перепад температур) с окружающей средой. Таким образом, граничное условие может быть задано одним из возможных способов:

1) $u|_S = f(S, t)$, (14.23)

где $f(S, t)$ — известная функция точек поверхности S и времени t;

2) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \mathrm{F}(S, t)$, (14.24)

где $\mathrm{F}(S, t)$ — заданная функция точек поверхности S и времени t;

3) при теплообмене с окружающей средой граничные условия в общем случае имеют вид

$$\alpha u\Big|_S + \beta \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \Phi(S, t), \qquad (14.25)$$

где α, β — константы; Φ — заданная функция.

Начальные условия для уравнения теплопроводности

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \qquad (14.26)$$

где φ — заданная функция точек тела V.

В рассмотренных уравнениях колебания струны и теплопроводности тело не обязательно должно быть ограничено. Можно рассматривать бесконечную струну или пространство. Тогда граничные

условия (14.20) для бесконечной струны или (14.23)—(14.25) для неограниченного тела отпадают. Задача без этих условий называется задачей Коши, а условия (14.22) или (14.26) — начальными условиями или условиями Коши.

Телеграфное уравнение. Сформулируем задачу Коши для телеграфного уравнения. Рассмотрим бесконечно простирающуюся в обе стороны линию. Для такой линии в начальный момент необходимо задать распределение напряжения и тока:

$$u|_{t=0} = f(x);\ i|_{t=0} = \varphi(x), \tag{14.27}$$

где $f(x)$, $\varphi(x)$ — заданные функции.

В силу уравнений (14.14) и (14.15) можно найти $u'_t|_{t=0}$ и $i'_t|_{t=0}$. Действительно, из выражения (14.15) следует

$$\frac{\partial i}{\partial x}\bigg|_{t=0} + Gu\bigg|_{t=0} + C\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0.$$

Отсюда, из первого равенства (14.27) и равенства $\frac{\partial i}{\partial x}\Big|_{t=0} = \varphi'(x)$, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -\frac{G}{C}f(x) - \frac{1}{C}\varphi'(x). \tag{14.28}$$

Аналогично получим

$$\frac{\partial i}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -\frac{R}{L}\varphi(x) - \frac{1}{L}f'(x). \tag{14.29}$$

Итак, *в математической постановке задача о распространении напряжения (тока) вдоль длинной линии сводится к решению телеграфного уравнения (14.17) [(14.18)] при начальных условиях (14.27) и (14.28) [(14.27) и (14.29)]*.

В зависимости от способа задания граничных условий различают три типа краевых задач математической физики.

Краевая задача Дирихле. На границе S рассматриваемого тела задаются значения искомой функции $u|_S = f(S)$.

Краевая задача Неймана. На границе S тела V задается значение производной $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = f(S)$, где $\mathbf{n}$ — нормаль к S.

Смешанная или третья краевая задача. На границе S тела V задается условие $\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_S = f(S)$.

Корректность постановки задач математической физики. В постановке задач математической физики содержатся функции, входящие в начальные и граничные условия. Ясно, что решения таких задач зависят от этих функций. Начальные и граничные условия на практике являются результатом некоторых измерений, поэтому неизбежны погрешности в их определении. Эти погрешности влияют на погрешности решений, и не всегда последние оказываются достаточно малыми, т. е. малые ошибки в начальных и гра-

ничных условиях могут повлечь за собой большую ошибку в решении.

Различают корректно и некорректно поставленные задачи математической физики.

Задача математической физики называется *корректно поставленной по Адамару*, если решение задачи существует; задача имеет единственное решение; решение задачи непрерывно зависит от исходных данных.

Задачи, не удовлетворяющие перечисленным условиям, называются *некорректно поставленными*.

Рассмотрим *пример Адамара* некорректно поставленной задачи

Пример 4. Найти решение $u(x, t)$ уравнения Лапласа $u''_{xx} + u''_{tt} = 0$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(x, 0) = 0 = f_1(x); \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{1}{a}\sin ax = \varphi_1(x), \; a > 0; \; x \in \mathbf{R}.$$

□ Можно проверить, что решением искомой задачи является функция

$$u_1(x, t) = \frac{1}{a^2}\sin ax \cdot \operatorname{sh} at, \; a > 0.$$

Если положить $f_2(x) = \varphi_2(x) \equiv 0$, то решением такой задачи Коши будет функция $u_2(x, t) \equiv 0$. Погрешности $|f_1(x) - f_2(x)|$ и $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$ начальных условий удовлетворяют равенствам

$$\sup_{x \in R} |f_1(x) - f_2(x)| = 0; \quad \sup_{x \in R} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = 1/a,$$

а погрешность $|u_1(x, t) - u_2(x, t)|$ решения — равенству

$$\sup_{x \in R} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| = \sup_{x \in R} \left| \frac{1}{a^2}\sin ax \cdot \operatorname{sh} at \right| = \frac{1}{a^2}\operatorname{sh} at.$$

При достаточно больших значениях $a > 0$ величина $\sup\limits_{x \in R} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = 1/a$ может быть сколь угодно малой, а величина $\operatorname{sh} at/a^2$ при фиксированном $t > 0$ — сколь угодно большой.

Таким образом, сформулированная задача не обладает свойством устойчивости по отношению к начальным данным и, значит, является некорректно поставленной.

Классификация линейных уравнений второго порядка. Рассмотрим дифференциальные уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными x и y и постоянными коэффициентами.

Общий вид *линейного относительно старших производных уравнения:*

$$a_{11}u''_{xx} + 2a_{12}u''_{xy} + a_{22}u''_{yy} + F_1(x, y, u, u'_x, u'_y) = 0.$$

Здесь $u = u(x, y)$ — неизвестная функция; a_{11}, a_{12}, a_{22} — постоянные коэффициенты; F_1 — заданная функция своих аргументов.

Уравнение называется *линейным*, если оно имеет вид

$$a_{11}u''_{xx} + 2a_{12}u''_{xy} + a_{22}u''_{yy} + a_{13}u'_x + a_{23}u'_y + a_{33}u + f = 0, \qquad (14.30)$$

где a_{ij} — постоянные коэффициенты, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$; $f = f(x, y)$ — заданная функция.

Уравнению (14.30) соответствует квадратичная форма

$$Q(z_1, z_2) = a_{11}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + a_{22}z_2^2 \qquad (14.31)$$

с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}.$$

Дифференциальное уравнение (14.30) классифицируется в зависимости от собственных значений λ_1 и λ_2 матрицы A квадратичной формы (14.31).

Говорят, что:

1) уравнение (14.30) является уравнением *эллиптического типа*, если λ_1 и λ_2 не равны нулю и имеют один знак;

2) уравнение (14.30) является уравнением *гиперболического типа*, если λ_1 и λ_2 отличны от нуля и имеют противоположные знаки;

3) уравнение (14.30) является уравнением *параболического типа*, если одно из чисел λ_1 или λ_2 равно нулю.

Так как

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2 \qquad (14.32)$$

(см. доказательство следствия из теоремы 1.36, ч. I), то *уравнение* (14.30) является *уравнением эллиптического типа*, если выполнено условие

$$(\lambda_1\lambda_2 > 0) \Leftrightarrow (a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0) \Leftrightarrow (|A| > 0). \qquad (14.33)$$

В этом случае уравнение (14.30) линейной заменой переменных $x = \alpha\xi + \beta\eta$, $y = \gamma\xi + \delta\eta$ (α, β, γ, δ — некоторые числа) сводится к уравнению

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f_1\left(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta\right) = 0,$$

где ξ, η — новые переменные; f_1 — известная функция.

Аналогично из равенства (14.32) следует, что условие

$$(\lambda_1\lambda_2 < 0) \Leftrightarrow (a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0) \Leftrightarrow (|A| < 0) \qquad (14.34)$$

является *условием гиперболичности* уравнения (14.30). В этом случае уравнение (14.30) линейной заменой сводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f_2\left(\xi, \eta, u'_\xi, u'_\eta\right) = 0,$$

где $a^2 = -\lambda_2/\lambda_1 > 0$; f_2 — известная функция.

Наконец, из равенства (14.32) следует, что условие

$$(\lambda_1\lambda_2 = 0) \Leftrightarrow (a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0) \Leftrightarrow (|A| = 0) \qquad (14.35)$$

является *условием параболичности* уравнения (14.30). В этом случае оно линейной заменой приводится к виду

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + f_3\left(\xi,\ \eta,\ u,\ u'_\xi,\ u'_\eta\right) = 0$$

или

$$\lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f_4\left(\xi,\ \eta,\ u,\ u'_\xi,\ u'_\eta\right) = 0,$$

где f_3, f_4 — известные функции.

На практике сведение уравнения (14.30) к каноническому виду с помощью линейной замены осуществляется по схеме приведения квадратичной формы (14.31) ортогональным преобразованием к каноническому виду (см. § 1.19, ч. I).

Пример 5. Привести к каноническому виду уравнения

а) $u''_{xx} - 8u''_{xy} + 16u''_{yy} + 3u'_x - 12u'_y = 0;$ (14.36)

б) $u''_{xx} - 4u''_{xy} - 3u''_{yy} - 0;$ (14.37)

в) $2u''_{xx} + 2u''_{xy} + 2u''_{yy} + u'_x + u'_y = 0.$ (14.38)

□ а) Уравнению (14.36) соответствует квадратичная форма $Q = (z_1,\ z_2) = z_1^2 - 8z_1z_2 + 16z_2^2$ с матрицей $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix}$, причем $|A| = 0$, т. е. уравнение (14.36) — параболического типа. Находим собственные значения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 17$ матрицы A и соответствующие им собственные векторы $\mathbf{e}^1 = (4,\ 1)^T$ и $\mathbf{e}^2 = (1,\ -4)^T$. Нормируя эти векторы, составляем матрицу перехода

$$T = \begin{bmatrix} 4/\sqrt{17} & 1/\sqrt{17} \\ 1/\sqrt{17} & -4/\sqrt{17} \end{bmatrix}.$$

Вводим замену переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4/\sqrt{17} & 1/\sqrt{17} \\ 1/\sqrt{17} & -4/\sqrt{17} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

т. е. $x = \frac{1}{\sqrt{17}}(4\xi + \eta);\ y = \frac{1}{\sqrt{17}}(\xi - 4\eta).$

Отсюда

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{17}}(4x + y);\ \eta = \frac{1}{\sqrt{17}}(x - 4y). \qquad (14.39)$$

Преобразуем производные уравнения (14.36) к новым переменным ξ и η. С учетом равенства (14.39) имеем:

$$u'_x = u'_\xi \xi'_x + u'_\eta \eta'_x = u'_\xi \frac{4}{\sqrt{17}} + u'_\eta \frac{1}{\sqrt{17}};$$

$$u'_y = u'_\xi \xi'_y + u'_\eta \eta'_y = u'_\xi \frac{1}{\sqrt{17}} - u'_\eta \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Другими словами,

$$\begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u'_\xi \\ u'_\eta \end{pmatrix}. \qquad (14.40)$$

Далее,

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi}\xi'^{2}_{x} + 2u''_{\xi\eta}\xi'_{x}\eta'_{x} + u''_{\eta\eta}\eta'^{2}_{x} +$$
$$+ u'_{\xi}\xi''_{xx} + u'_{\eta}\eta''_{xx} = \frac{16}{17}u''_{\xi\xi} + \frac{8}{17}u''_{\xi\eta} + \frac{1}{17}u''_{\eta\eta};$$
$$u''_{yy} = u''_{\xi\xi}\xi'^{2}_{y} + 2u''_{\xi\eta}\xi'_{y}\eta'_{y} + u''_{\eta\eta}\eta'^{2}_{y} + u'_{\xi}\xi''_{yy} +$$
$$+ u'_{\eta}\eta''_{yy} = \frac{1}{17}u''_{\xi\xi} - \frac{8}{17}u''_{\xi\eta} + \frac{16}{17}u''_{\eta\eta};$$
$$u''_{xy} = u''_{\xi\xi}\xi'_{x}\xi'_{y} + u''_{\xi\eta}\left(\xi'_{x}\eta'_{y} + \xi'_{y}\eta'_{x}\right) +$$
$$+ u''_{\eta\eta}\eta'_{x}\eta'_{y} + u'_{\xi}\xi''_{xy} + u'_{\eta}\eta''_{xy} =$$
$$= \frac{4}{17}u''_{\xi\xi} - \frac{15}{17}u''_{\xi\eta} - \frac{4}{17}u''_{\eta\eta}.$$

Подставив все производные в уравнение (14.36), получим его в каноническом виде:

$$\left(17u''_{\eta\eta} + 3\sqrt{17}\,u'_{\eta} = 0\right) \Leftrightarrow \left(u''_{\eta\eta} + \frac{3}{\sqrt{17}}u'_{\eta} = 0\right).$$

Проверкой убеждаемся, что решением этого уравнения является функция

$$u(\xi,\ \eta) = \varphi_1(\xi)\,e^{-3\eta/\sqrt{17}} + \varphi_2(\xi),$$

где $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$ — произвольные функции.

Подставив ξ и η из равенств (14.30), окончательно найдем искомое решение уравнения (14.36):

$$u(x,\ y) = \varphi_1\left(\frac{1}{\sqrt{17}}(4x + y)\right)e^{-3(x-4y)/17} + \varphi_2\left(\frac{1}{\sqrt{17}}(4x + y)\right).$$

Заметим, что на практике нет необходимости выражать u''_{xx}, u''_{yy} и u''_{xy} через новые переменные ξ и η. Это связано с тем, что при переходе к ним по формуле $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ квадратичная форма (14.31) уравнения (14.30) всегда приводится к каноническому виду. Производные же u'_x и u'_y заменяются по формуле (14.40).

б) Рассмотрим уравнение (14.37). Соответствующая ему квадратичная форма имеет матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -7 < 0$. Таким образом, уравнение (14.37) — гиперболического типа. Собственными значениями матрицы A являются числа $\lambda_1 = 2\sqrt{2} - 1$ и $\lambda_2 = -2\sqrt{2} - 1$, а нормированными собственными векторами ее, отвечающими λ_1 и λ_2,— векторы $\mathbf{e}^1 = \left(\frac{1}{4-2\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}\right)^T$ и $\mathbf{e}^2 = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}, -\frac{1}{4-2\sqrt{2}}\right)^T$. Тогда в результате замены

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4-2\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} & -\frac{1}{4-2\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} u'_\xi \\ u'_\eta \end{pmatrix}$$

уравнение (14.37) приводится к каноническому виду

$$(2\sqrt{2}-1)\,u''_{\xi\xi}-(2\sqrt{2}+1)\,u''_{\eta\eta}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(u''_{\xi\xi}=\frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}\,u''_{\eta\eta}\right)\Leftrightarrow\left(u''_{\xi\xi}=a^2u''_{\eta\eta}\right),\qquad(14.41)$$

где $a^2=\dfrac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}>0$.

Общая схема решения уравнений типа (14.41) будет изложена ниже.

в) Для уравнения (14.38) имеем $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=3>0$. Согласно условию (14.33), заключаем, что уравнение (14.38) является уравнением эллиптического типа.

Находим собственные значения матрицы $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=3$, а также ее нормированные собственные векторы $\mathbf{e}^2=(1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2})^T$ и $\mathbf{e}^2=(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})^T$. С помощью замены

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\xi+\eta);\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\xi+\eta)\end{cases}$$

и

$$\begin{pmatrix}u'_x\\ u'_y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u'_\xi\\ u'_\eta\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}u'_x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(u'_\xi+u'_\eta);\\ u'_y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-u'_\xi+u'_\eta)\end{cases}$$

уравнение (14.38) приводится к каноническому виду

$$u''_{\xi\xi}+3u''_{\eta\eta}+\sqrt{2}\,u'_\eta=0.$$

Заметим, что если в уравнении (14.30) коэффициенты a_{ij} переменные, то для него выделяются области эллиптичности, гиперболичности и параболичности.

Пример 6. Найти области эллиптичности, гиперболичности и параболичности уравнения $yu''_{xx}+u''_{yy}=0$.

□ Матрица $A=\begin{bmatrix}y & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=y$. Поэтому уравнение при $y>0$ является эллиптическим, при $y<0$ — гиперболическим, при $y=0$ — параболическим.

Характеристики. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$a_{11}u''_{xx}+2a_{12}u''_{xy}+a_{22}u''_{yy}+F\left(x,\ y,\ u,\ u'_x,\ u'_y\right)=0,\qquad(14.42)$$

линейное относительно старших производных. Этому уравнению поставим в соответствие дифференциальное уравнение первого порядка

$$a_{11}v'^2_x+2a_{12}v'_xv'_y+a_{22}v'^2_y=0,\qquad(14.43)$$

которое называется *дифференциальным уравнением характеристик* уравнения (14.42). Если функция $v = v(x, y)$ — решение уравнения (14.43), то линия уровня $v(x, y) = C = \text{const}$ называется *характеристической линией* или *характеристикой дифференциального уравнения* (14.42). Левая часть уравнения (14.43) представляет собой квадратичную форму переменных v'_x и v'_y с матрицей $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$. Так как для эллиптического уравнения матрица A положительно или отрицательно определена, то уравнение (14.43) в этом случае имеет лишь решение $v'_x = 0$, $v'_y = 0$. Значит, в этом случае $v \equiv \equiv \text{const}$ и уравнение (14.42) эллиптического типа не имеет действительных характеристик.

Справедлива

Теорема 14.1. Если функция $v = v(x, y)$ — частное решение уравнения характеристик (14.43), то соотношение $v(x, y) = C$ является общим интегралом обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2a_{12}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + a_{22} = 0. \tag{14.44}$$

Наоборот, если $v(x, y) = C$ — общий интеграл уравнения (14.44), то функция $v = v(x, y)$ удовлетворяет уравнению характеристик (14.43).

□ Пусть $v(x, y)$ — решение уравнения (14.43). Из соотношения $v(x, y) = C$ при условии $v'_y \neq 0$ для производной неявной функции y имеем

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{v'_x}{v'_y}. \tag{14.45}$$

Разделив равенство (14.43) на $(v'_y)^2$ и учитывая соотношение (14.45), получаем равенство (14.44).

Наоборот, пусть $v(x, y) = C$ — общий интеграл уравнения (14.44). Подставив производную неявной функции $y'_x = -v'_x/v'_y$ в равенство (14.44), получим уравнение характеристик (14.43). ■

Из теоремы следует, что для нахождения характеристик нужно решить дифференциальное уравнение (14.44). Но оно равносильно двум уравнениям

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{-|A|}}{a_{11}}. \tag{14.46}$$

Вычислив общие интегралы уравнений (14.16), получим искомые уравнения характеристик данного дифференциального уравнения (14.42).

Заметим, что в случае параболического уравнения ($|A| = 0$) из равенства (14.46) получаем одно семейство характеристик, определяемое уравнением $y' = a_{12}/a_{11}$. Для гиперболического же уравнения ($|A| < 0$) получаем два семейства характеристик — решения уравнений (14.46).

Пример 7. Найти характеристики уравнения

$$u''_{xx} - 2\sin x \cdot u''_{xy} - \cos^2 x \cdot u''_{yy} - \cos x \cdot u'_y = 0. \qquad (14.47)$$

□ Имеем $a_{11} = 1$, $a_{12} = -\sin x$, $a_{22} = -\cos^2 x$. Так как $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -\cos^2 x - \sin^2 x = -1 < 0$, данное уравнение относится к гиперболическому типу и, значит, имеет два семейства характеристик. Согласно равенству (14.46), их дифференциальные уравнения

$$\left(y' = \frac{-\sin x \pm 1}{1}\right) \Leftrightarrow (dy = -\sin x dx \pm dx).$$

Общими интегралами этих уравнений являются:

$$x + y - \cos x = C_1;\ x - y + \cos x = C_2. \qquad (14.48)$$

Это и есть уравнения характеристик для дифференциального уравнения (14.47).

Выше указан алгоритм приведения линейного дифференциального уравнения к каноническому виду с помощью линейного преобразования $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$. Другим способом приведения уравнения к каноническому виду является нелинейная замена переменных с помощью характеристик. Суть этого способа заключается в следующем.

Для уравнений гиперболического типа имеется два семейства характеристик: $\varphi(x, y) = C_1$ и $\psi(x, y) = C_2$. Тогда замена $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ приводит уравнение к каноническому виду.

Если уравнение параболического типа, оно имеет одно семейство характеристик $\varphi(x, y) = C$. В этом случае замена $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, где $\psi(x, y)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, такая, что якобиан $D(\xi, \eta)/D(x, y) \neq 0$ в рассматриваемой области приводит уравнение к каноническому виду.

Уравнение же эллиптического типа имеет комплексно-сопряженные характеристики вида $\varphi(x, y) \pm i\psi(x, y)$. Тогда с помощью замены $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ приводим это уравнение к каноническому виду.

Пример 8. Привести к каноническому виду уравнение (14.47).

□ Согласно уравнениям характеристик (14.48), вводим замену

$$\xi = x + y - \cos x;\ \eta = x - y + \cos x. \qquad (14.49)$$

С учетом этих равенств имеем:

$$u'_x = u'_\xi (1 + \sin x) + u'_\eta (1 - \sin x);$$

$$u'_y = u'_\xi - u'_\eta;$$

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi}(1 + \sin x)^2 + 2u''_{\xi\eta}\cos^2 x +$$

$$+ u''_{\eta\eta}(1 - \sin x)^2 + u'_\xi \cos x - u'_\eta \cos x;$$

$$u''_{xy} = u''_{\xi\xi}(1 + \sin x) + u''_{\xi\eta}(-1 - \sin x + 1 -$$

$$-\sin x) + u''_{\eta\eta}(\sin x - 1);$$

$$u''_{yy} = u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}.$$

Подставив эти производные в уравнение (14.48), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{14.50}$$

Положив $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$, приведем уравнение (14.50) к каноническому виду $u''_{\alpha\alpha} - u''_{\beta\beta} = 0$.

Решением уравнения (14.50), согласно примеру 2 и замене (14.49), является функция вида

$$u = G(\xi) + F(\eta) = G(x + y - \cos x) + F(x - y + \cos x),$$

где G, F — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

14.3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Формула Д'Аламбера. Рассмотрим задачу Коши для бесконечной однородной струны: требуется найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty; \ t > 0, \tag{14.51}$$

при начальных условиях

$$u(x, 0) = f(x); \tag{14.52}$$

$$u'_t(x, 0) = F(x) \tag{14.53}$$

(рассматриваются только свободные колебания струны).

Для уравнения (14.51) уравнения характеристик определяются из соотношения

$$(dx^2 - a^2 dt^2 = 0) \Leftrightarrow (dx \mp a dt = 0).$$

Общими интегралами этих уравнений являются прямые $x + at = C_1$ и $x - at = C_2$, где C_1 и C_2 — константы. Тогда с помощью замены $\xi = x + at$, $\eta = x - at$ приводим уравнение (14.51) к виду $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. Решением этого уравнения, согласно примеру 2, § 14.2, является функция

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at), \tag{14.54}$$

где f_1, f_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Определим их, исходя из начальных условий (14.52) и (14.53). При $t = 0$ из равенства (14.54) и (14.52) имеем

$$f_1(x) + f_2(x) = f(x). \tag{14.55}$$

Аналогично из равенств (14.54) и (14.53) при $t = 0$ получаем

$$af'_1(x) - af'_2(x) = F(x). \tag{14.56}$$

Интегрируя равенство (14.56) от 0 до x, находим, что

$$af_1(x) - af_2(x) = \int_0^x F(t)\,dt + C, \qquad (14.57)$$

где C — произвольная постоянная.

Решив совместно уравнения (14.55) и (14.57) относительно f_1 и f_2, найдем:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + \frac{1}{a}\int_0^x F(t)\,dt + C\right);$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{1}{a}\int_0^x F(t)\,dt - C\right).$$

Отсюда и из формулы (14.54) получаем искомое решение задачи Коши для бесконечной струны:

$$u(x,\ t) = \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} F(t)\,dt - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} F(t)\,dt,$$

т. е.

$$u(x,\ t) = \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(t)\,dt. \qquad (14.58)$$

Соотношение (14.58) называется *формулой Д'Аламбера для бесконечной струны.*

Пример 1. Найти форму бесконечной однородной струны, если начальная форма струны $f(x) = x$, а начальная скорость ее $F(x) = \cos x$.

□ По формуле (14.58),

$$u(x,\ t) = \frac{x+at+x-at}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \cos t\,dt =$$

$$= x + \frac{1}{2a}(\sin(x+at) - \sin(x-at)) = x + \frac{1}{a}\cos x \sin at.$$

Метод Фурье решения волнового уравнения. Рассмотрим задачу колебаний конечной струны, закрепленной в точках $x = 0$ и $x = l$. В математической постановке она состоит в решении волнового уравнения (14.51), $0 < x < l$, $t > 0$, при начальных условиях

$$u(x,\ 0) = f(x); \quad u_t'(x,\ 0) = F(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad (14.59)$$

и при краевых условиях

$$u(0,\ t) = u(l,\ t) = 0, \quad t \geqslant 0. \qquad (14.60)$$

По *методу Фурье разделения переменных* ненулевое частное решение сформулированной задачи ищется в виде

$$u(x,\ t) = X(x)\,T(t), \tag{14.61}$$

где $X = X(x) \not\equiv 0$ и $T = T(t) \not\equiv 0$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

Подставляя выражение (14.61) в уравнение (14.51), получаем

$$X(x)\,T''(t) = a^2 X(x)\,T(t),$$

откуда

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{14.62}$$

Левая часть равенства (14.62) зависит только от t, а правая — только от x. Поэтому если зафиксировать, например, $t \geqslant 0$, то отношение X''/X будет константой при любых $x \in [0,\ l]$. Наоборот, при фиксированном $x \in [0,\ l]$ отношение $T''/(a^2T)$ также является константой при любых $t \geqslant 0$. Из этого делаем вывод, что оба отношения являются постоянными при любых $x \in [0,\ l]$ и $t \geqslant 0$, т. е. равенство (14.62) возможно лишь при

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \text{const}.$$

Отсюда получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0;\ X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{14.63}$$

Из граничных условий (14.60) для функции (14.61) имеем:

$$(u(0,\ t) = 0) \Rightarrow (X(0)\,T(t) = 0);$$
$$(u(l,\ t) = 0) \Rightarrow (X(l)\,T(t) = 0). \tag{14.64}$$

Поскольку ищется нетривиальное частное решение уравнения (14.51), то $T(t) \not\equiv 0$, $\forall t \geqslant 0$. Поэтому равенства (14.64) возможны лишь при $X(0) = X(l) = 0$.

Таким образом, задача отыскания функции $X(x) \not\equiv 0$ сводится к следующей краевой задаче: найти нетривиальное решение дифференциального уравнения

$$X'' + \lambda X(x) = 0 \tag{14.65}$$

при краевых условиях

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{14.66}$$

Краевая задача (14.65)—(14.66) называется *задачей Штурма*—Лиувилля*. Числа λ называются *собственными значениями* этой задачи, а отвечающие этим λ нетривиальные решения $X(x)$ — *собственными функциями* задачи Штурма—Лиувилля.

Найдем собственные значения и собственные функции задачи (14.65)—(14.66). Рассмотрим три случая: $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$.

1. $\lambda = 0$. Из равенства (14.65) получим уравнение $X''(x) = 0$.

* Ж. Ш. Ф. Штурм (1803—1855) — французский математик.

Оно имеет решение $X(x) = C_1 x + C_2$, где C_1 и C_2 — константы. Из граничных условий (14.66) следует, что

$$\left.\begin{array}{l} C_1 \cdot 0 + C_2 = 0; \\ C_1 l + C_2 = 0; \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = 0; \\ C_2 = 0, \end{array}\right.$$

т. е. $X(x) \equiv 0$. Поскольку ищутся нетривиальные решения задачи (14.65)—(14.66), ясно, что $\lambda = 0$ не может служить собственным значением этой задачи.

2. $\lambda < 0$. В этом случае общим решением уравнения (14.65) является функция $X(x) = C_1 e^{x\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-x\sqrt{-\lambda}}$. Из граничных условий (14.66) получаем

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1 e^{l\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-l\sqrt{-\lambda}} = 0; \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = 0; \\ C_2 = 0, \end{array}\right.$$

т. е. при $\lambda < 0$ отличных от нуля решений задачи Штурма—Лиувилля не существует.

3. $\lambda > 0$. Общее решение уравнения (14.65) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}\, x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}\, x.$$

При $x = 0$ получаем $(C_1 = 0) \Rightarrow X(x) = C_2 \sin \sqrt{\lambda}\, x$. Второе граничное условие дает $X(l) = C_2 \sin \sqrt{\lambda}\, l = 0$. Если предположить, что $C_2 = 0$, то снова получим решение $X(x) \equiv 0$. Поэтому должно быть

$$\left(\sin \sqrt{\lambda}\, l = 0\right) \Rightarrow \left(\sqrt{\lambda}\, l = n\pi\right),\ n \in N.$$

Отсюда $\sqrt{\lambda} = n\pi/l$, $n \in N$. Таким образом, $X(x) = C_2 \sin(n\pi x/l)$.

Итак, если $\sqrt{\lambda} = n\pi/l$, $n \in N$, то существуют нетривиальные решения уравнения (13.65). Обозначим через $X_n(x)$ решение, отвечающее фиксированному n, а через A_n — соответствующую константу, т. е.

$$X_n(x) = A_n \sin(n\pi x/l). \qquad (14.67)$$

Система функций $\{\sin(n\pi x/l)\}$ является системой собственных функций задачи Штурма—Лиувилля (14.65)—(14.66), отвечающих собственным значениям $\lambda = n^2\pi^2/l^2$.

Для найденного λ решим уравнение

$$\left(T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0\right) \Leftrightarrow \left(T''(t) + \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} T(t) = 0\right).$$

Его общим решением является функция

$$T_n(t) = C_n \cos(n\pi a t/l) + B_n \sin(n\pi a t/l),$$

где C_n, B_n — константы.

Тогда, согласно равенству (14.61), частным решением волнового уравнения (14.51) является функция

$$u_n(x, t) = X_n(x)\, T_n(t) = A_n \sin \frac{n\pi}{l} x \left(C_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + \right.$$

$$+ B_n \sin\frac{n\pi a}{l} t\Big) = \Big(a_n \cos\frac{n\pi a}{l} t + b_n \sin\frac{n\pi a}{l} t\Big)\sin\frac{n\pi}{l} x,$$

где $a_n = A_n C_n$, $b_n = A_n B_n$ — константы.

Вследствие линейности и однородности волнового уравнения сумма частных решений $u_n(x, t)$ также является решением его, т. е. функция

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi a}{l} t + b_n \sin\frac{n\pi a}{l} t\Big)\sin\frac{n\pi}{l} x \qquad (14.68)$$

есть решение уравнения (14.51). Предположим, что этот ряд сходится и его можно дважды почленно дифференцировать. Тогда из начальных условий (14.59) будем иметь:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{l} x = f(x);$$
$$u'_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} b_n \sin\frac{n\pi}{l} x = F(x). \qquad (14.69)$$

Пусть функции $f(x)$ и $F(x)$ разложимы в ряд Фурье по синусам на промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$, т. е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{n\pi x}{l};\quad f_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx;$$
$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin\frac{n\pi x}{l};\quad F_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Сравнение этих рядов с формулами (14.69) показывает, что для выполнения начальных условий надо положить $a_n = f_n$, $b_n = \frac{l}{n\pi a} F_n$, т. е.

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx;$$
$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (14.70)$$

Подставив выражения для a_n и b_n в ряд (14.68), окончательно найдем решение сформулированной выше задачи.

Пример 2. Найти решение уравнения колебания струны, закрепленной в точках $x = 0$ и $x = l$, если при $t = 0$

$$u(x, 0) = f(x) = A\sin(\pi x/l);\ u'_t(x, 0) = F(x) = v_0.$$

□ Решение задачи определяется рядом (14.68). По формулам (14.70) найдем коэффициенты a_n и b_n:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l A \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \begin{cases} A, & n = 1; \\ 0, & n > 1; \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l v_0 \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ \dfrac{4v_0 l}{(2k+1)^2\pi^2 a}, & k = 0,\ 1,\ \ldots \end{cases}$$

Итак, искомым решением задачи является ряд

$$u(x,\ t) = A\cos\frac{\pi a}{l}t\sin\frac{\pi x}{l} +$$

$$+ \frac{4v_0 l}{\pi^2 a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x.$$

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге методом Фурье. Эта задача формулируется следующим образом: найти функцию $u = u(x,\ y)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ внутри круга радиусом a и граничному условию $u = f(x,\ y)$ на границе этого круга, где f — заданная гладкая функция.

Введем полярную систему координат ρ, φ по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $0 \leqslant \rho \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ с началом в центре круга. Тогда искомая функция $u = u(x,\ y) = u(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi) = \widetilde{u}(\rho,\ \varphi)$. Согласно равенству (13.71), уравнение Лапласа в полярных координатах записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\varphi^2} = 0. \qquad (14.71)$$

Частное решение уравнения (14.71) в соответствии с методом Фурье ищем в виде

$$\widetilde{u}(\rho,\ \varphi) = R(\rho)\,\Phi(\varphi). \qquad (14.72)$$

Подставив выражение (14.72) в уравнение (14.71) и разделив переменные, получим

$$\frac{\rho\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR}{d\rho}\right)}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda = \text{const},$$

так как левая часть равенства не зависит от φ, а правая — от ρ. Из последнего равенства получаем два уравнения:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0,\ \Phi \not\equiv 0; \qquad (14.73)$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) - \lambda R = 0,\ R \not\equiv 0. \qquad (14.74)$$

Общим решением уравнения (14.73) является функция

$$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi, \qquad (14.75)$$

где A, B — константы.

Так как функция $\tilde{u}(\rho, \varphi)$ является 2π-периодической, т. е. $\tilde{u}(\rho, \varphi) = \tilde{u}(\rho, \varphi + 2\pi)$, то должно быть $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$. Это возможно, согласно равенству (14.75), при $\sqrt{\lambda} = n$, где $n = 0, 1, \ldots$ Следовательно,

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi, \qquad (14.76)$$

где A_n, B_n — константы.

Решение $R = R(\rho)$ уравнения (14.74) будем искать в виде $R = C\rho^{\mu}$, где C — константа, отличная от нуля. Подставим это выражение в уравнение (14.74):

$$\mu(\mu - 1)\rho^{\mu-2} + \mu\rho^{\mu-2} - \lambda\rho^{\mu-2} = 0$$

или

$$(\mu(\mu - 1) + \mu - n^2 = 0) \Leftrightarrow (\mu^2 = n^2) \Leftrightarrow (\mu = \pm n).$$

Итак, линейно независимыми решениями уравнения (14.74) являются функции ρ^n и ρ^{-n}. Следовательно, общее решение этого уравнения есть $R_n(\rho) = C_n\rho^n + D_n\rho^{-n}$, где C_n и D_n — константы.

Решением уравнения Лапласа является гармоническая функция $\tilde{u}(\rho, \varphi)$, непрерывная в круге $\rho \leqslant a$. В таком случае, по теореме Вейерштрасса (§ 26.2, ч. II), эта функция ограничена в круге $\rho \leqslant a$. Вследствие ограниченности решения $\tilde{u}(\rho, \varphi)$ необходимо положить $D_n = 0$, так как в противном случае $R_n(\rho) \to \infty$ при $\rho \to 0$.

Таким образом, согласно соотношению (14.72), частным решением задачи Дирихле для круга является функция

$$\tilde{u}_n(\rho, \varphi) = (A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)\,C_n\rho^n = \\ = (a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)\,\rho^n,$$

где $a_n = A_nC_n$, $b_n = B_nC_n$ — константы.

Вследствие линейности и однородности уравнения Лапласа его решением будет функция

$$\tilde{u}(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi) = \\ = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\rho^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi) \qquad (14.77)$$

при условии, что этот ряд сходится и его можно дважды почленно дифференцировать.

Чтобы определить коэффициенты a_n и b_n ряда (14.77), воспользуемся условием $\tilde{u}\big|_{\rho=a} = \tilde{f}$ на границе круга $\rho \leqslant a$, где $\tilde{f} = f(\rho\times$ $\times\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. В точках окружности $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, функция $\tilde{f}$ будет зависеть только от φ: $\tilde{f} = \tilde{f}(\varphi)$. Подставив $\rho = a$ в ряд (14.77), получим

$$\tilde{u}(a, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) = \tilde{f}.$$

Пусть функция $\tilde{f}$ разложима в ряд Фурье по основной тригонометрической системе на $(0, 2\pi)$, т. е.

$$\tilde{f}(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi,$$

где $\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\varphi)\, d\varphi$; $\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi$; $\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\varphi) \times$ $\times \sin n\varphi d\varphi$.

Сравнивая ряды Фурье для функций $\tilde{u}(a, \varphi)$ и $\tilde{f}(\varphi)$, из равенства $\tilde{u}(a, \varphi) = \tilde{f}(\varphi)$ получаем $\alpha_0 = 2a_0$, $\alpha_n = a^n a_n$, $\beta_n = a^n b_n$, т. е.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\varphi)\, d\varphi; \quad a_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi;$$
$$b_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{14.78}$$

Итак, решением задачи Дирихле для круга радиусом a является ряд (14.77), коэффициенты которого определяются по формулам (14.78).

Получим другую форму записи решения этой задачи. Подставим коэффициенты (14.78) в ряд (14.77). В результате получим

$$\tilde{u}(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta)\, d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left(\left(\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta) \cos n\theta d\theta \right) \cos n\varphi + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta) \sin n\theta d\theta \right) \sin n\varphi \right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^n \cos n(\varphi - \theta) \right) d\theta. \tag{14.79}$$

Преобразуем выражение, стоящее во внешних скобках равенства. По формуле Эйлера $\cos n(\varphi - \theta) = \frac{e^{in(\varphi-\theta)} + e^{-in(\varphi-\theta)}}{2}$. Тогда, полагая $z = \frac{\rho}{a}$, $|z| < 1$, $(\rho < a)$ и пользуясь формулой суммы геометрической прогрессии при $|z| < 1$, будем иметь

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^n \cos n(\varphi - \theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left(e^{in(\varphi-\theta)} + e^{-in(\varphi-\theta)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left((ze^{in(\varphi-\theta)})^n + (ze^{-i(\varphi-\theta)})^n\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{ze^{i(\varphi-\theta)}}{1 - ze^{i(\varphi-\theta)}} + \frac{ze^{-i(\varphi-\theta)}}{1 - ze^{-i(\varphi-\theta)}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1 - z^2}{1 - 2z\cos(\varphi - \theta) + z^2}.$$

Подставляя это выражение в равенство (14.79), получаем

$$\tilde{u}(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1 - z^2)\,\tilde{f}(\theta)}{1 - 2z\cos(\varphi - \theta) + z^2}\,d\theta.$$

Полагая $z = \rho/a$, окончательно получаем решение задачи Дирихле в виде

$$\tilde{u}(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)\,(a^2 - \rho^2)}{a^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \theta) + \rho^2}\,d\theta. \qquad (14.80)$$

Выражение (14.80) называется *интегралом Пуассона.*

Пример 3. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, если $u|_{\rho=1} = \varphi^2 = \tilde{f}(\varphi)$.

□ Находим коэффициенты a_0, a_n и b_n по формулам (14.78):

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{4}{3}\pi^2;\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi^2 \cos n\varphi d\varphi = \frac{4}{n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi^2 \sin n\varphi d\varphi = -\frac{4\pi}{n}.$$

На основании формулы (14.77) записываем искомое решение:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n\left(\frac{1}{n^2}\cos n\varphi - \frac{4\pi}{n}\sin n\varphi\right).$$

Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности методом преобразования Фурье. Рассмотрим задачу Коши о распространении теплоты в неограниченном стержне, боковая поверхность которого теплоизолирована. В математической постановке она сводится к отысканию решения $u(x, t)$ однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ -\infty < x < +\infty;\ t > 0, \qquad (14.81)$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x, 0) = f(x). \qquad (14.82)$$

Будем считать, что искомое решение $u(x, t)$ и его производные

u_t', u_x' и u_{xx}'' преобразуемы по Фурье. Тогда $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}u(x,\ t)=0$ (см. теорему 10.10, ч. III). Пусть

$$U(i\omega,\ t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(x,\ t)\,e^{-i\omega x}\,dx \tag{14.83}$$

есть Фурье-преобразование искомого решения $u(x,\ t)$. Преобразуем по Фурье обе части дифференциального уравнения (14.81):

$$\mathbf{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}\,e^{-i\omega x}\,dx=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(x,\ t)\,e^{-i\omega x}\,dx=\frac{\partial U(i\omega,\ t)}{\partial t};$$

$$\mathbf{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,e^{-i\omega x}\,dx=e^{-i\omega x}\,\frac{\partial u}{\partial x}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}+i\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}\,\frac{\partial u}{\partial x}\,dx.$$

Согласно равенству $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$, получаем:

$$\mathbf{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}=i\omega e^{-i\omega x}\,u(x,\ t)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}-\omega^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}\cdot u\,dx=-\omega^2U(i\omega,\ t),$$

так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}u(x,\ t)=0$.

Итак, преобразованное по Фурье уравнение (14.81) имеет вид

$$\frac{\partial U(i\omega,\ t)}{\partial t}=-a^2\omega^2U(i\omega,\ t)$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial t}+a^2\omega^2U=0. \tag{14.84}$$

Обозначим $F(i\omega)$ Фурье-преобразование начального условия (14.82), тогда

$$\mathbf{F}\{f(x)\}=F(i\omega)=U(i\omega,\ t)\,|_{t=0}. \tag{14.85}$$

Тем самым краевая задача (14.81)—(14.82) свелась к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (14.84) с начальным условием (14.85) (ω — параметр).

Решением уравнения (14.84) при начальных условиях (14.85) является функция

$$U(i\omega,\ t)=F(i\omega)\,e^{-a^2\omega^2t}. \tag{14.86}$$

Перейдем теперь от найденного изображения (14.86) к искомому решению $u(x,\ t)$ уравнения (14.81). Правую часть равенства (14.86) будем рассматривать как произведение преобразований $F(i\omega)$ и $e^{-a^2\omega^2t}$. Пусть $\mathbf{F}^{-1}\{e^{-a^2\omega^2t}\}=\varphi(x,\ t)$. Тогда, по формуле обратного преобразования Фурье,

$$\varphi(x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega^2t}e_t^{\omega x}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega^2t+i\omega x}\cdot d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(a\omega\sqrt{t}\ -\frac{ix}{2a\sqrt{t}}\right)}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\,d\omega.$$

В полученном интеграле введем замену $a\sqrt{t}\omega\ -\frac{ix}{2a\sqrt{t}}=\alpha$, $d\omega=$ $=\frac{d\alpha}{a\sqrt{t}}$. Тогда

$$\varphi(x,\ t)=\frac{1}{2\pi a\sqrt{t}}e^{-x^2/4a^2t}\int\limits_{-\infty-ix/2a^2t}^{+\infty-ix/2a^2t}e^{-\alpha^2}d\alpha.$$

В примере 4, § 15.3 будет показано, что

$$\int\limits_{-\infty-ix/2a^2t}^{+\infty-ix/2a^2t}e^{-\alpha^2}d\alpha=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=\sqrt{\pi},$$

согласно интегралу Пуассона (7.41), ч. II. Тем самым

$$\varphi(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4a^2t}. \tag{14.87}$$

Итак,

$$f(x)=\mathbf{F}^{-1}\{F(i\omega)\};\ \varphi(x,\ t)=F^{-1}\{e^{-a^2\omega^2t}\},$$

где $\varphi(x,\ t)$ определяется формулой (14.87). Тогда, согласно теореме о преобразовании по Фурье, свертки функций (см. гл. 10, ч. III)

$$u(x,\ t)=\mathbf{F}^{-1}\{F(i\omega)\,e^{-a^2\omega^2t}\}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\,\varphi(x-\tau,\ t)\,d\tau=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\,e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2t}}\,d\tau. \tag{14.88}$$

Функция (14.88) и есть искомое решение задачи Коши о теплопроводности бесконечного стержня. Можно проверить, что функция

$$\Gamma(x,\ t;\ \tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2t}} \tag{14.89}$$

является решением уравнения (14.81). Оно называется *фундаментальным решением.*

Пример 4. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=3\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ при условии $u(x,\ 0)=$ $=e^{-2x^2}=f(x)$.

□ Записываем искомое решение по формуле (14.88):

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\tau^2}e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2t}}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{((8a^2t+1)\tau^2-2x\tau+x^2)}{4a^2t}}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{2x^2}{8a^2t+1}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\frac{\sqrt{8a^2+1}}{2a\sqrt{t}}\tau-\frac{x}{2a\sqrt{t}\sqrt{8a^2t+1}}\right)^2}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{8a^2t+1}}e^{-\frac{2x^2}{8a^2t+1}}$$

Отсюда при $a=\sqrt{3}$

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{24t+1}}e^{-\frac{2x^2}{24t+1}}.$$

15. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

15.1. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Кривые и области в комплексной плоскости. Известно (см. § 4.2, ч. II), что комплексное число $z = x + iy$ геометрически на плоскости XY изображается вектором с началом в точке (0, 0) и концом в точке (x, y). Тем самым множество комплексных чисел $\mathbf{C}$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством точек плоскости XY: числу $z = x + iy$ соответствует точка с координатами x, y. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью* и обозначается $\mathbf{C}$. Модуль комплексного числа $z = x + iy$ вычисляется по формуле $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а его аргумент $\varphi = \arg z$ определяется соотношениями $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, причем $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ или $0 \leqslant \arg z < 2\pi$.

Расстояние между двумя точками $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ комплексной плоскости определяется равенством

$$\rho(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (15.1)$$

Исходя из формулы (15.1), уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ радиусом R с центром в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ запишется в виде

$$|z - z_0| = R. \qquad (15.2)$$

При любом фиксированном числе $\varepsilon > 0$ множество всех точек $z \in \mathbf{C}$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \varepsilon$, образует на $\mathbf{C}$ внутренность круга радиусом ε с центром в точке z_0. Это множество называется *ε-окрестностью точки z_0* и обозначается $U_\varepsilon(z_0)$. Исключив из окрестности $U_\varepsilon(z_0)$ точку z_0, получим проколотую окрестность $\dot{U}_\varepsilon(z_0) = U_\varepsilon(z_0) \setminus z_0$ точки z_0. Множество $D \subset \mathbf{C}$ называется *ограниченным*, если существует такое число $K > 0$, что $|z| \leqslant K$, $\forall z \in D$. На комплексной плоскости неравенству $|z| \leqslant K$, $\forall z \in D$, удовлетворяют все точки $z \in D$, расположенные внутри круга радиусом K с центром в начале координат, включая его границу.

Введем понятие предела последовательности комплексных чисел $(z_n) = (x_n + iy_n)$, где (x_n) и (y_n) — последовательности действительных чисел. Число $a + ib = A$ называется *пределом последовательности* комплексных чисел $(z_n) = (x_n + iy_n)$ и обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует целое число $N = N(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $n \geqslant N$ выполнено

неравенство $|z_n - A| < \varepsilon$. Другими словами, число A называется пределом последовательности (z_n), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $N = N(\varepsilon)$, такое, что все члены последовательности (z_n) с номерами $n \geqslant N$ принадлежит ε-окрестности $U_\varepsilon(A)$ точки A.

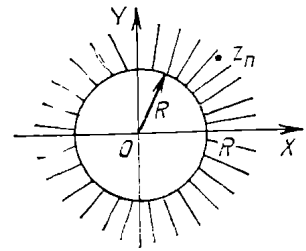


Рис. 15.1

Как и в случае последовательности действительных чисел, можно доказать, что всякая сходящаяся последовательность комплексных чисел ограничена. Далее, из теоремы 6.1, ч. II, и равенства (15.1) следует, что последовательность $(z_n) = (x_n + iy_n)$ сходится к $A = a + ib$ тогда и только тогда, когда $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Последовательность комплексных чисел (z_n) называется *сходящейся к бесконечности* или *к бесконечно удаленной точке* $z = \infty$ и обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, если

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty. \tag{15.3}$$

Соотношение (15.3) означает, что для любого сколь угодно большого действительного числа $R > 0$ существует номер N, такой, что для всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|z_n| > R$. Геометрически это неравенство означает, что точки z_n при $n \geqslant N$ лежат вне круга радиусом R с центром в точке O (рис. 15.1). Дополним плоскость $\mathbf{C}$ бесконечно удаленной точкой $z = \infty$. Комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется *расширенной комплексной плоскостью* и обозначается $\overline{\mathbf{C}}$. *Окрестностью* бесконечно удаленной точки называется множество $|z| > R$, т. е. внешность круга радиусом R с центром в начале координат (рис. 15.1). Чем больше R, тем «меньше» окрестность бесконечно удаленной точки.

Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$, — непрерывные или непрерывно дифференцируемые действительные функции. Тогда комплексная функция

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in T, \tag{15.4}$$

определяет на комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ непрерывную или соответственно гладкую кривую l. Уравнение (15.4) равносильно параметрическому заданию кривой l на плоскости XY: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$.

Пример 1. Составить в комплексной форме уравнение окружности радиусом R с центром в начале координат.

□ Исходя из параметрических уравнений $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, искомой окружности, в соответствии с выражением (15.4) получаем

$$z(t) = x(t) + iy(t) = R\cos t + iR\sin t = R(\cos t + i\sin t) = Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Пример 2. Записать в комплексной форме уравнение окружности радиусом R с центром в точке $z_0 = x_0 + iy_0$.

□ На плоскости XY искомое уравнение имеет вид $(x - x_0^2) + (y - y_0)^2 = R^2$ или в параметрической форме $x - x_0 = R\cos t$, $y - y_0 = R\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогда из равенства (15.4)

$$z = z(t) = (x_0 + R\cos t) + i(y_0 + R\sin t) =$$
$$= (x_0 + iy_0) + R(\cos t + i\sin t) = z_0 + Re^{it},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Таким образом, в комплексной форме уравнение окружности радиусом R с центром в точке z_0 описывается соотношением

$$z = z_0 + Re^{it},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \qquad (15.5)$$

Пример 3. Записать уравнение эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ в комплексной форме.

□ Исходя из параметрических уравнений эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, получаем

$$z = x + iy = a\cos t + ib\sin t = a\frac{e^{it} + e^{-it}}{2b} + ib\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} =$$
$$= \frac{a+b}{2}e^{it} + \frac{a-b}{2}e^{-it},\ t \in [0, 2\pi].$$

Пример 4. Определить вид кривой:

а) $z = 3e^{it} - \dfrac{1}{2e^{it}}$;

б) $z = t^2 + 4t + 20 - i(t^2 + 4t + 4)$.

□ а) Имеем $z(t) = 3e^{it} - \dfrac{1}{2}e^{-it} = 3(\cos t + i\sin t) - \dfrac{1}{2}(\cos t - i\sin t) =$ $= \dfrac{5}{2}\cos t + i\dfrac{7}{2}\sin t$. Отсюда $x = \dfrac{5}{2}\cos t$, $y = \dfrac{7}{2}\sin t$ — параметрические уравнения эллипса $\dfrac{x^2}{(5/2)^2} + \dfrac{y^2}{(7/2)^2} = 1$.

б) Имеем

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) = t^2 + 4t + 20; \\ y = y(t) = -(t^2 + 4t + 4), \end{array}\right\} \Rightarrow x + y = 16.$$

Итак, искомой линией на плоскости XY является прямая $x + y = 16$.

Пусть D — множество точек расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$. Точка $z_1 \in D$ называется *внутренней точкой* множества D, если существует ε-окрестность $U_\varepsilon(z_1)$ этой точки, целиком содержащаяся в D (рис. 15.2). Точка z_2 называется *граничной точкой* множества D, если в любой ее окрестности $U_\delta(z_2)$ имеются точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству D (рис. 15.2). Совокупность граничных точек множества D называется его *границей*. В дальнейшем на рисунках штриховой линией будем отмечать границу множества, не принадлежащую самому множеству. Множество D с присоединенной к нему границей Γ называется

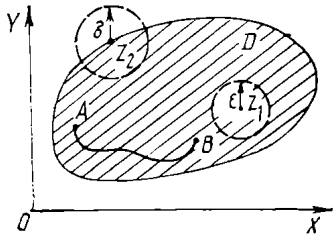


Рис. 15.2

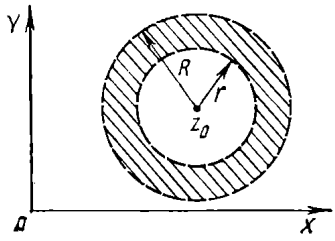


Рис. 15.3

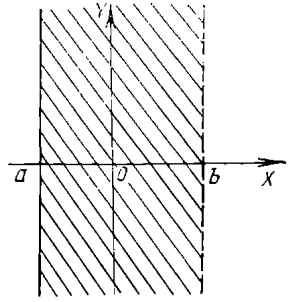


Рис. 15.4

замкнутым, а множество D — *открытым*, если все его точки внутренние. Множество D называется *связным*, если две любые его точки A и B можно соединить непрерывной кривой, полностью расположенной в D. Связное открытое множество $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ называется *областью*. Область D с присоединенной к ней границей является *замкнутой*. Множество $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ называется n-связным, если его граница состоит из n-связных непересекающихся множеств (кусков). В дальнейшем будем рассматривать только такие области, границы которых состоят из конечного числа кусочно-гладких кривых и, возможно, изолированных точек.

Пример 5. Следующие множества: а) круг $|z - z_0| < R$ (рис. 15.1); б) кольцо $r < |z - z_0| < R$, $0 \leqslant r < R$ (рис. 15.3); в) полоса $a \leqslant \mathrm{Re} z < b$, $a < b$, a, $b \in R$ (рис. 15.4) являются примерами областей.

Пример 6. Вычертить область, заданную неравенствами:

а) $|z - 2 - i| \geqslant 1$, $1 \leqslant \mathrm{Re} z < 3$, $0 < \mathrm{Im} z \leqslant 3$;

б) $|z - 1| < 1$, $\arg z \leqslant \pi/4$, $\arg(z - 1) > \pi/4$.

□ а) Неравенство $(|z - 2 - i| \geqslant 1) \Leftrightarrow (|z - (2 + i)| \geqslant 1)$ определяет внешность круга (включая границу) радиусом 1 с центром в точке $z_0 = 2 + i$. Неравенство $(1 \leqslant \mathrm{Re} z < 3) \Leftrightarrow (1 \leqslant x < 3)$ определяет полосу, заключенную между прямыми $x = 1$ и $x = 3$. Неравенство $(0 < \mathrm{Im} z \leqslant 3) \Leftrightarrow (0 < y \leqslant 3)$ определяет полосу, заключенную между прямыми $y = 0$ и $y = 3$. Искомая область (заштрихована) изображена на рис. 15.5.

б) Множество $|z - 1| < 1$ есть внутренность круга радиусом 1 с центром в $z_0 = 1$ (точка A на рис. 15.6). Для этого множества $\mathrm{Re} z > 0$. Неравенство

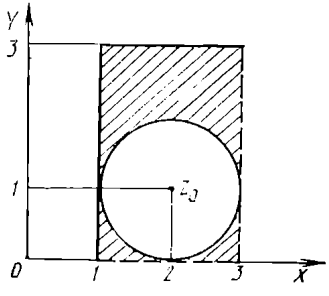


Рис. 15.5

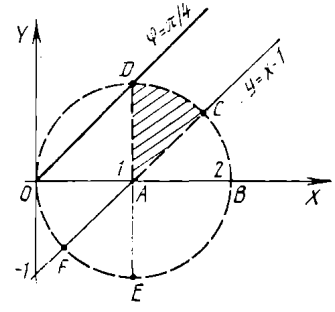


Рис. 15.6

$\arg z \leqslant \pi/4$ определяет множество точек плоскости XY, расположенных в первом квадранте между осью X и лучом $\varphi = \pi/4$. Для этого множества $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Тем самым неравенства $|z-1|<1$ и $\arg z \leqslant \pi/4$ выделяют область $OBCDO$.

Рассмотрим неравенство $(\arg(z-1) > \pi/4) \Leftrightarrow (\arg((x-1)+iy) > \pi/4) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-1} > \pi/4\right)$, т. е. $y/(x-1) > 1$. Отсюда

$$\left(\frac{y-x+1}{x-1} > 0\right) \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} y > x-1; \\ x > 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} y < x-1; \\ x < 1 \end{pmatrix}\right).$$

Этим системам неравенств удовлетворяют точки секторов ACD и AFE. Тем самым искомой областью, удовлетворяющей всем трем неравенствам, является сектор ACD (кроме его границы).

Функции комплексной переменной. Комплексная переменная $w = f(z)$ является функцией комплексной переменной $z = x + iy$. принадлежащей множеству D, если каждому $z \in D$ поставлено в соответствие одно или некоторая совокупность комплексных чисел w, Функция w называется *однозначной*, если каждому z ставится в соответствие только одно число $w = f(z)$, в противном случае она называется *многозначной*.

Пример 7. а) Функция $w = 1/z$ определена на всей комплексной плоскости $\bar{\mathbf{C}}$, кроме точки $z = 0$. Если $z = x + iy$, то

$$w = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Ясно, что эта функция однозначна.

б) Функция $w = \sqrt{z-1} + \sqrt{z+1}$ определена на всей комплексной плоскости $\bar{\mathbf{C}}$. Эта функция многозначна, поскольку корень квадратный из комплексного числа имеет два значения. Беря различные сочетания корней, приходим к выводу, что эта функция четырехзначна. Например, для $z = 0$ получим четыре значения функции w:

$$w = \sqrt{-1} + \sqrt{1} = \{i+1,\ i-1,\ -i+1,\ -i-1\}.$$

Функция $w = f(z)$ преобразует комплексные числа $z = x + iy$ в комплексные числа вида $w = u + iv$:

$$f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y). \qquad (15.6)$$

Таким образом, комплекснозначную функцию комплексной переменной $z = x + iy$ можно рассматривать как пару действительных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ двух действительных переменных x и y. Функция $u = u(x, y)$ называется *действительной частью* функции $w = f(z)$, т. е. $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, а функция $v = v(x, y)$ — *мнимой частью* функции $w = f(z)$, т. е. $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$.

Пример 8. Выделить действительную и мнимую части функции $f(z) = z^2 - 5z + 2$.

□ Имеем $f(z) = z^2 - 5z + 2 = (x+iy)^2 - 5(x+iy) + 2 = x^2 + 2ixy - y^2 - 5x - 5iy + 2 = (x^2 - y^2 - 5x + 2) + i(2xy - 5y)$.

Таким образом, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 - 5x + 2$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = 2xy - 5y$.

Пример 9. Для функции $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ имеем $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^y \sin y$.

Геометрическая интерпретация функции комплексной переменной. Пусть D — область на плоскости $\mathbf{C}_z$ комплексной переменной z и $w = f(z)$ — однозначная функция, определенная на D. Каждой точке $z \in D$ функция f ставит в соответствие комплексное число $w = u + iv$.

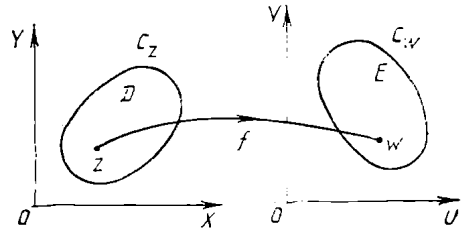


Рис. 15.7

Возьмем две комплексные плоскости: плоскость $\mathbf{C}_z$ аргумента z с осями X и Y и плоскость $\mathbf{C}_w$ значений функции $f(z)$ с координатными осями U и V (рис. 15.7). Образ множества D при отображении f на плоскости $\mathbf{C}_w$ образует некоторое множество $E = f(D)$.

Пример 10. Пусть область D — полукруг $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $y \geqslant 0$. Найти образ $f(D)$ этой области при отображении $w = z^2$.

□ Представим $z \in D$ в показательной форме $z = |z| e^{i\varphi}$, где $\varphi = \arg z$, причем для верхнего полукруга $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Тогда $w = u + iv = z^2 = |z|^2 e^{i2\varphi} = |z|^2 \times (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Отсюда $u = |z|^2 \cos 2\varphi$, $v = |z|^2 \sin 2\varphi$, $0 \leqslant |z| \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Исключив параметр φ, получим $u^2 + v^2 = |z|^4$, $0 \leqslant |z| \leqslant 1$. При фиксированной переменной z уравнение $u^2 + v^2 = |z|^4$ на плоскости $\mathbf{C}_w$ определяет окружность радиусом $|z|^2$ с центром в начале координат. Поскольку радиус $|z|^2$ изменяется от нуля до единицы, то эти окружности полностью заполняют круг $u^2 + v^2 \leqslant 1$. Таким образом, функция $w = z^2$ отображает полукруг $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $y \geqslant 0$, на плоскости $\mathbf{C}_z$ в круг $u^2 + v^2 \leqslant 1$ на плоскости $\mathbf{C}_w$.

Пример 11. Найти образы линий:

а) $x = c$; б) $y = c$; в) $\arg z = \alpha$ при отображении функцией $w = z^2$.

□ а) Прямая $x = c$ на плоскости XY параметрически описывается уравнениями $x = c$, $y = y$, $y \in R$ (y — параметр). В комплексном виде, согласно равенству (15.4), эта прямая определяется соотношением $z = c + iy$, $y \in R$. Тогда $w = u + iv = z^2 = (c + iy)^2 = c^2 - y^2 + 2ciy$. Отсюда $u = c^2 - y^2$, $v = 2cy$. Исключив параметр y из этой системы, получим уравнение параболы $u = c^2 - v^2/4c^2$. Итак, образом прямой $x = c$ при отображении $w = z^2$ является парабола $u = c^2 - v^2/4c^2$.

Если на плоскости XY задать полосу $c \leqslant x \leqslant b$, то образом ее на плоскости UV при отображении $w = z^2$ будет полоса, заключенная между параболами $u = c^2 - v^2/4c^2$ и $u = b^2 - v^2/4b^2$ (рис. 15.8, *а*).

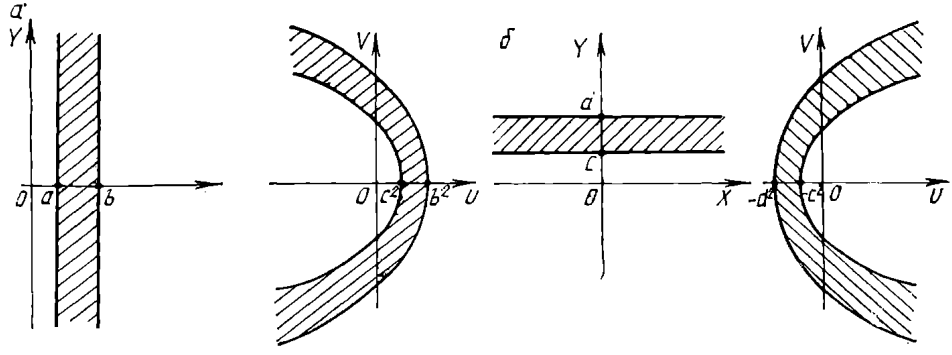


Рис. 15.8

б) Аналогично прямая $y = c$ на плоскости XY в комплексной форме запишется в виде $z = x + ic$, $x \in \mathbf{R}$. Тогда $w = u + iv = (x + ic)^2 = x^2 - c^2 + i2cx$, т. е. $u = x^2 - c^2$, $v = 2cx$, $x \in R$. Исключив из этих уравнений параметр x, получим уравнение параболы $u = v^2/4c^2 - c^2$ на плоскости UV.

Итак, образом прямой $y = c$ при отображении $w = z^2$ является парабола $u = v^2/4c^2 - c^2$. Ясно, что это отображение полосу $c \leqslant y \leqslant d$ на плоскости XY переводит в полосу, заключенную между параболами $u = v^2/4c^2 - c^2$ и $u = v^2/4d^2 - d^2$ (рис. 15.8, *б*).

в) На плоскости $\mathbf{C}_z$ уравнение $\arg z = \alpha$ определяет луч, исходящий из начала координат под углом α к оси X. Для этого луча $z = re^{i\alpha}$, $r \geqslant 0$. Тогда $w = \arg z^2 = \arg\left((re^{i\alpha})^2\right) = \arg\left(r^2 e^{i2\alpha}\right) = 2\alpha$, т. е. на плоскости $\mathbf{C}_w$ получим луч $w = \rho e^{i2\alpha}$, $\rho = r^2$, исходящий из начала координат под углом 2α к оси U.

Итак, отображение $w = z^2$ удваивает углы.

Замечание. Если функция $w = f(z)$ многозначна, то геометрически нельзя истолковать ее как отображение одной плоской фигуры на другую. В этом случае необходимо использовать несколько комплексных плоскостей $\mathbf{C}_w$, образующих так называемую *риманову поверхность.*

Предел и непрерывность функции в точке. Пусть D — множество на комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ и z_0 — внутренняя точка D или его граничная точка. Если $U_\delta(z_0)$ — некоторая δ-окрестность точки z_0, то множество $U(z_0) = D \cap U_\delta(z_0)$ называется *окрестностью точки* z_0 в D. Например, если z_2 — граничная точка множества D, то ее окрестностью в D является часть круга с центром в z_2 (на рис. 15.2 заштрихована).

Пусть функция $w = f(z)$ определена в проколотой окрестности $\dot{U}(z_0)$ точки z_0. Число $A = a + ib$ называется *пределом функции* $f(z)$ *в точке* z_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех $z \in \dot{U}_\delta(z_0)$ выполнено неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$. Тот факт, что A является пределом функции $f(z)$ в точке z_0, записывается в виде

$$A = \lim_{z \to z_0} f(z) \text{ или } f(z) \to A, \ z \to z_0.$$

Данное определение предела функции $f(z)$ в точке эквивалентно следующему: число A называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0, если для любой последовательности (z_n), $z_n \in \dot{U}(z_0)$, сходящейся к z_0, последовательность $(f(z_n))$ сходится к A.

При определении предела функции $f(z)$ в точке z_0 сама точка z_0 из рассмотрения исключается.

Функция $f(z)$, имеющая предел в точке z_0, обладает следующими свойствами.

1°. Если $f(z)$ имеет в точке z_0 предел, то он единствен.

2°. Функция $f(z)$, имеющая предел в точке z_0, ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

Напомним, что ограниченность функции $f(z)$ на множестве D означает наличие константы $K > 0$, такой, что $|f(z)| < K$, $\forall z \in D$.

3°. Если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \neq 0$, то существует проколотая окрестность $\dot{U}(z_0)$ точки z_0, такая, что $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \dot{U}(z_0)$.

4°. Если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = B$, то

$$\lim_{z\to z_0}(f(z)\pm g(z))=A\pm B;\ \lim_{z\to z_0}(f(z)\,g(z))=A\cdot B;$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B},\ B\neq 0.$$

Доказательства этих свойств аналогичны доказательствам соответствующих свойств функций действительной переменной, имеющих предел в точке.

Функция $f(z)$, определенная в некоторой окрестности точки z_0, называется *непрерывной в точке* z_0, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

Так как функцию комплексной переменной $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$ можно рассматривать как векторную функцию $f=(u(x,\ y),\ v(x,\ y))$ переменных x и y, то из свойств векторных функций следует, что $f(z)$ непрерывна в точке $z_0=x_0+iy_0$ тогда и только тогда, когда функции $u=u(x,\ y)$ и $v=v(x,\ y)$ непрерывны в точке $(x_0,\ y_0)$.

Функция $f(z)$ называется *непрерывной на множестве* D, если она непрерывна в каждой точке множества D.

Основные элементарные функции комплексной переменной. Рассмотрим основные элементарные функции комплексной переменной z.

Степенная функция $w=z^n$, где n — целое положительное число. Положив $z=x+iy$ и разложив многочлен $(x+iy)^n$ по формуле бинома Ньютона, нетрудно получить действительную часть $u(x,\ y)$ и мнимую часть $v(x,\ y)$ функции $w=z^n$. Например, $w=z^3=(x+iy)^3=x^3+3x^2iy+3x(iy)^2+(iy)^3=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$, т. е. $u=x^3-3xy^2$, $v=3x^2y-y^3$.

Функция $w=z^n$ однозначна. Она определена и непрерывна во всех точках комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$. Так как $(z\to\infty)\Leftrightarrow(|z|\to\infty)$, то и $|z^n|=|z|^n\to\infty$ при $n\to\infty$. Отсюда следует, что $z^n\to\infty$ при $z\to\infty$. Полагая $w=\infty$ для $z=\infty$, можно считать функцию $w=z^n$ однозначной и непрерывной на расширенной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$.

Целая рациональная функция, или многочлен

$$w=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ \dots\ +a_{n-1}z+a_n, \tag{15.7}$$

где в общем случае коэффициенты — комплексные числа. Функция (15.7) однозначна. Она определена и непрерывна во всех точках комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$. Положив $w=\infty$ при $z=\infty$, получим функцию, однозначную и непрерывную во всех точках расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$.

Дробно-рациональная функция, или рациональная дробь $(n<m)$

$$w=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ \dots\ +a_{n-1}z+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\ \dots\ +b_{m-1}z+b_m} \tag{15.8}$$

есть отношение двух многочленов. Если $n>m$, то из дроби (15.8) можно выделить целую часть. Например,

$$\frac{3z^3+5z^2+z+1}{3z^2-z+1}=z+2+\frac{2z-1}{3z^2-z+1}.$$

Функция (15.8) как частное двух многочленов непрерывна и однозначна на всей плоскости $\bar{\mathbf{C}}$, за исключением тех точек, где знаменатель обращается в нуль.

Если $n<m$, то $w\to 0$ при $z\to\infty$. Если же $n>m$, то $w\to\infty$ при $z\to\infty$. Если $n=m$, то, разделив числитель и знаменатель дроби на z^n, получим

$$w=\frac{a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots+\frac{a_n}{z^n}}{b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\ldots+\frac{b_n}{z^n}},$$

откуда следует, что $\lim\limits_{z\to\infty} w=a_0/b_0$.

Показательная функция e^z комплексной переменной $z=x+iy$ определяется равенством

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{15.9}$$

Отсюда $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$.

Функция e^z обладает свойствами.

1°. Для любых чисел z_1 и z_2 имеет место равенство $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$.

В самом деле, если $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, то из определения (15.9) и известных свойств функции e^{iy} получаем

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)\,e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)=e^{x_1+x_2}e^{iy_1}e^{iy_2}=$$
$$=e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)}=e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}=e^{z_1+z_2}.$$

2°. Функция e^z является периодической с периодом $2\pi i$, т. е. $e^z=e^{z+2\pi i}$.

Действительно, $e^{z+2\pi i}=e^{x+i(y+2\pi)}=e^x(\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi))=e^x(\cos y+i\sin y)=e^{x+iy}=e^z$.

3°. Функция e^z непрерывна на всей комплексной плоскости $\bar{\mathbf{C}}$.

4°. Для любого комплексного $z=x+iy$ справедливы равенства:

$$|e^z|=e^x;\ \arg e^z=y. \tag{15.10}$$

Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ комплексной переменной z определяются равенствами:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i};\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}. \tag{15.11}$$

Из непрерывности показательной функции следует, что функции $\sin z$ и $\cos z$ однозначны и непрерывны во всех точках комплексной плоскости $\bar{\mathbf{C}}$. Кроме того, они обладают приведенными ниже свойствами.

1°. Справедливы соотношения:

а) $\sin^2 z+\cos^2 z=1$; б) $\sin 2z=2\sin z\cos z$;

в) $\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2$;

г) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \pm \sin z_1 \sin z_2$.

Докажем, например, п. «в». Имеем

$$\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 = \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \times$$

$$\times \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} +$$

$$+ \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} =$$

$$= \sin(z_1 + z_2).$$

2°. Функции $\sin z$ и $\cos z$ являются периодическими с периодом 2π. Это свойство следует из свойства 2° функции e^z.

3°. Для функции $\sin z$ и $\cos z$ справедливы равенства:

$$\sin(-z) = -\sin z; \quad \cos(-z) = \cos z, \tag{15.12}$$

т. е. $\sin z$ — нечетная, а $\cos z$ — четная функции.

Равенства (15.12) легко проверяются, исходя из определения (15.11) функций $\sin z$ и $\cos z$.

Может оказаться, что $|\cos z| > 1$ или $|\sin z| > 1$, что в действительном анализе не имеет места.

Пример 12. Имеем $\cos i = (e^{i^2} + e^{-i^2})/2 = (e^{-1} + e)/2 > 1$.

Пример 13. $\sin 2i = (e^{-2} - e^2)/2i = i(e^2 - e^{-2})/2 \Rightarrow |\sin 2i| = (e^2 - e^{-2})/2 > 1$.

4°. Имеют место формулы:

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y; \\ \cos z &= \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y. \end{aligned} \tag{15.13}$$

Докажем первое из равенства (15.13). Имеем

$$\sin z = -\frac{i}{2}(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}) = -\frac{i}{2}(e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}) =$$

$$= -\frac{i}{2}(e^{-y}\cos x + ie^{-y}\sin x - e^{y}\cos x + ie^{y}\sin x) =$$

$$= \sin x \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + i\cos x \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

Пример 14. Представить в алгебраической форме $\cos(\pi/6 + 2i)$.

□ По второй формуле (15.13) имеем

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2i\right) = \cos\frac{\pi}{6}\operatorname{ch} 2 - i \sin\frac{\pi}{6}\operatorname{sh} 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} 2 - i\frac{\operatorname{sh} 2}{2}.$$

Из равенств (15.13) следует, что уравнения $\sin z = 0$ и $\cos z = 0$ имеют решения только при $y = 0$. Например,

$$(\sin z = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \operatorname{ch} y = 0; \\ \cos x \operatorname{sh} y = 0. \end{cases}$$

Так как $\operatorname{ch} y \neq 0$, $\forall y$, то из первого равенства системы $\sin x = 0$. Так как $\cos x \neq 0$ при $\sin x = 0$, то из второго равенства системы получаем $\operatorname{sh} y = 0$, т. е. $y = 0$. Следовательно, $\sin z = 0$, если $z = x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, а $\cos z = 0$, если $z = \pm \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются соотношениями:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \tag{15.14}$$

Отсюда и из свойств функций $\sin z$ и $\cos z$ следует, что функция $\operatorname{tg} z$ непрерывна для всех $z \in \mathbf{C}$, кроме $z = \pi/2 + k\pi$, а функция $\operatorname{ctg} z$ непрерывна для всех $z \in \mathbf{C}$, кроме $z = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Гиперболические функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ определяются формулами:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \tag{15.15}$$

Отсюда

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}(e^{-i^2 z} - e^{i^2 z}) = -i\left(\frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i}\right) = -i \sin(iz),$$

т. е.

$$\operatorname{sh} z = -i \sin(iz). \tag{15.16}$$

Аналогично показывается, что

$$\operatorname{ch} z = \cos(iz). \tag{15.17}$$

Из равенств (15.16) и (15.17) следует, что $\operatorname{sh} z = 0$ при $z = k\pi i$, а $\operatorname{ch} z = 0$ при $z = (\pi/2 + k\pi) i$; $k \in \mathbf{Z}$.

Логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ определяется как обратная для показательной функции $z = e^w$. Полагая $w = u + iv$, $z = |z| e^{i\varphi}$, где $\varphi = \arg z$, имеем

$$z = |z| e^{i\varphi} = e^{u+iv} = e^u e^{iv}. \tag{15.18}$$

Отсюда при $z \neq 0$ получаем $(|z| = e^u) \Rightarrow (u = \ln |z|)$, $\ln |z|$ — действительное значение натурального логарифма от положительного числа $|z|$. Далее, поскольку функция $e^{i\varphi}$ периодична с периодом 2π, из равенства (15.18) получаем

$$(e^{iv} = e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + 2k\pi)}) \Rightarrow (v = \varphi + 2k\pi = \arg z + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z}).$$

Таким образом,

$$w = \operatorname{Ln} z = u + iv = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \ k \in \mathbf{Z}. \tag{15.19}$$

Положив в формуле (15.19) $k = 0$, получим *главное значение логарифма*

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Итак, функция $\operatorname{Ln} z$ является многозначной и определена для всех $z \neq 0$.

Используя логарифмическую функцию, можно определить *общую степенную функцию* z^α с любым показателем α:

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}. \tag{15.20}$$

Аналогично *общая показательная функция* $w = a^z$, $a \neq 0$, определяется равенством

$$w = a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}. \tag{15.21}$$

Пример 15. Представить в алгебраической форме число i^i.
Согласно равенству (15.20),

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\ln|i| + i(\arg i + 2k\pi))} = e^{(-\pi/2 + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

так как $\ln|i| = \ln 1 = 0$, $\arg i = \pi/2$.

Функции $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ определяются как *обратные* для функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ соответственно.

Так, если $z = \sin w$, то w называется *арксинусом* числа и обозначается $w = \operatorname{Arcsin} z$. Из определения функции $\sin w$ имеем $z = \sin w = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2}$. Отсюда находим, что $e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$. Минус можно опустить, если понимать корень как двузначную функцию. Таким образом, $e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$. Логарифмируя это равенство, получаем

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right). \tag{15.22}$$

Аналогично из уравнения $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$ находим

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right). \tag{15.23}$$

Точно так же можно получить формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctg} z &= \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}; \\ \operatorname{Arcctg} z &= -\frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{iz + 1}{iz - 1}. \end{aligned} \tag{15.24}$$

Нетрудно видеть, что обратные тригонометрические функции также являются многозначными.

Пример 16. Представить в алгебраической форме $\operatorname{Arctg} \dfrac{3\sqrt{3} + 8i}{7}$.

□ По первой из формул (15.24)

$$\operatorname{Arctg} \frac{3\sqrt{3} + 8i}{7} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + i(3\sqrt{3} + 8i)/7}{1 - i(3\sqrt{3} + 8i)/7} =$$

$$= \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{-1 + i3\sqrt{3}}{15 - i3\sqrt{3}} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{1}{2i}\left(\ln\frac{1}{3} + \right.$$

$$\left. + i\left(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right)\right) = \frac{\pi}{3} + k\pi - i\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

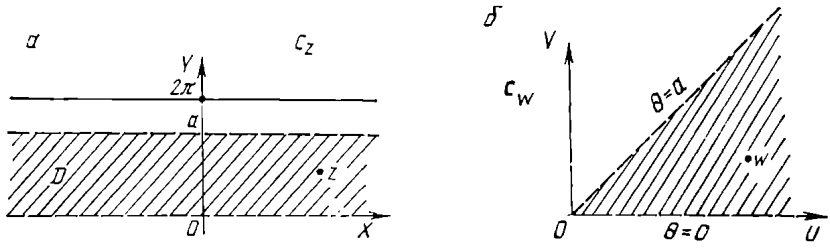


Рис. 15.9

Аналогично можно получить *обратные гиперболические функции:*

$$w = \operatorname{Arcsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right);\ w = \operatorname{Arcch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right);$$
$$w = \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z};\ w = \operatorname{Arccth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}.$$

Отображение областей. Приведем примеры отображения областей с помощью элементарных функций комплексного переменного.

Пример 17. Выяснить, во что преобразуется область D при отображении функцией $w = f(z)$:

а) $w = e^z$, D — полоса $0 < \operatorname{Im} z < a \leqslant 2\pi$;

б) $w = e^z$, D — полоса между прямыми $y = x$ и $y = x - 2\pi$ (граница полосы области D не принадлежит);

в) $w = \cos z$, D — полуполоса $0 < x < \pi/2$, $y > 0$;

г) $w = \dfrac{2}{z-1}$, D — внешность круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

□ а) Область D изображена на рис. 15.9, *а*. Пусть $z = x + iy \in D$. Тогда $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \rho e^{i\theta}$, где $\rho = |w| = e^x$, $\theta = \arg w = y$. Следовательно, отображение $w = e^z$ преобразует прямые $y = 0$ и $y = a$ в лучи $\theta = 0$ и $\theta = a$ соответственно. Точки же области D функцией $w = e^z$ отображаются во внутренние точки угла $0 < \theta < a$ (рис. 15.9, *б*). В самом деле, для точки $z = x + iy \in D$ получаем $0 < y < a$, $-\infty < x < +\infty$. На плоскости $\mathbf{C}_w$ ей отвечает точка $w = e^z = e^x e^{iy} = \rho e^{i\theta}$, $0 < \theta < a$, $0 < \rho < +\infty$, т. е. w принадлежит заштрихованному углу (рис. 15.9, *б*).

Очевидно, что полоса $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ функцией $w = e^z$ отображается на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, а полоса $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ — на всю плоскость $\mathbf{C}_w$, кроме точек положительной полуоси U. В этом случае говорят, что функция $w = e^z$ отображает полосу $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ на всю плоскость $\mathbf{C}_w$ *с разрезом вдоль положительной полуоси* U.

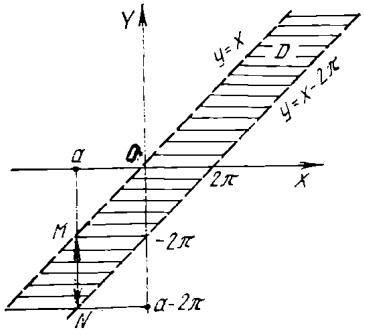


Рис. 15.10

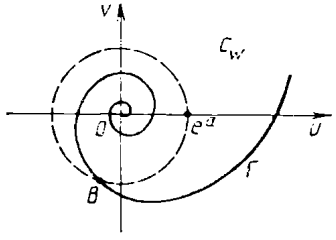


Рис. 15.11

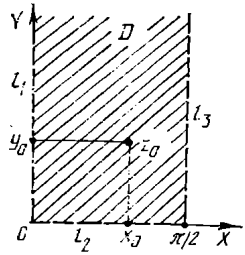


Рис. 15.12

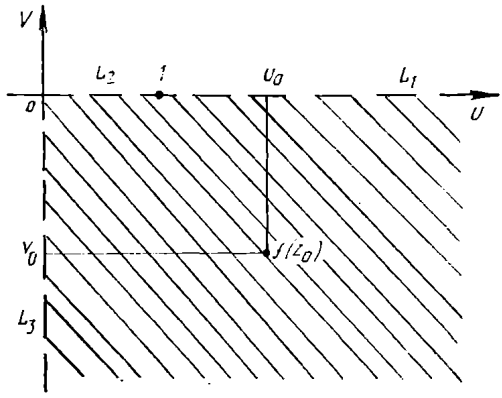


Рис. 15.13

б) Область D изображена на рис. 15.10. Имеем $w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, т. е. $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$. Найдем образы прямых $y = x$ и $y = x - 2\pi$ при отображении $w = e^z$.

Прямая $y = x$ отображается в кривую Г, параметрические уравнения которой в плоскости UV суть $u = e^x \cos x$, $v = e^x \cos x$, где $x = \arg z = y$, а z — точка прямой $y = x$, $x \in \mathbf{R}$. Отсюда $u^2 + v^2 = e^{2x}$ или $\rho = e^x$, где $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ — расстояние от точек кривой Г до начала координат в плоскости UV. Кривая $\rho = e^x$ является спиралью (рис. 15.11). При $x \to -\infty$ она, суживаясь, «накручивается» на точку (0, 0), ибо $\lim\limits_{x \to -\infty} u = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x \cos x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} v = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x \sin x = 0$.

Для прямой $y = x - 2\pi$ аналогично получаем $u = e^x \cos x$, $v = e^x \sin x$, $x \in \mathbf{R}$. Это та же спираль Г, изображенная на рис. 15.11.

Образом произвольного отрезка $MN = \{x = a,\ a < y < a - 2\pi\}$ из D на плоскости UV является окружность $u = e^a \cos y$, $v = e^a \sin y$, $a - 2\pi < y < a$, радиусом e^a с центром в начале координат. Этой окружности не принадлежит точка $B = (e^a \cos a,\ e^a \sin a)$, лежащая на спирали Г. При изменении a от $-\infty$ до $+\infty$ окружности $u = e^a \cos y$, $v = e^a \sin y$, $a - 2\pi < y < a$ заполняют всю плоскость UV, кроме точек спирали Г.

Таким образом, полоса D функцией $w = e^z$ отображается на всю комплексную плоскость $\mathbf{C}_w$, из которой исключены точка O и спираль Г. Говорят, что функция e^z отображает данную полосу на всю плоскость $\mathbf{C}_w$ *с разрезом вдоль спирали* Г.

в) Для функции $w = \cos z$, согласно формуле (15.13), имеем $\cos z = \cos x \times \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$, откуда $u = \cos x \operatorname{ch} y$, $v = -\sin x \operatorname{sh} y$. Область D изображена на рис. 15.12. Найдем теперь на плоскости UV образ отрезка l_1: $x = 0$, $y > 0$. Для него $u = \operatorname{ch} y$, $v = 0$, $y > 0$. В плоскости UV эти уравнения параметрически определяют отрезок: L_1: $v = 0$, $u > 1$, так как при $y > 0$ всегда $u = \operatorname{ch} y > 1$ (рис. 15.13). Далее, отрезок l_2: $0 < x < \pi/2$, $y = 0$, отображается на плоскости UV в часть прямой $u = \cos x$, $v = 0$, $0 < x < \pi/2$, являющуюся отрезком L_2: $0 < u < 1$, $v = 0$. Наконец, прямая l_3: $x = \pi/2$, $y > 0$, преобразуется в луч L_3: $u = 0$, $v = -\operatorname{sh} y < 0$, являющийся отрицательной частью оси V (рис. 15.13). Внутренние точки z_0 области D отображаются во внутренние точки $f(z_0)$ 4-й четверти плоскости UV. В самом деле, пусть $z_0 = x_0 + iy_0$, $0 < x_0 < \pi/2$, $y_0 > 0$. Для этой точки $u_0 = \cos x_0 \operatorname{ch} y_0 > 0$ и $v_0 = -\sin x_0 \operatorname{sh} y_0 < 0$, т. е., действительно, $f(z_0)$ принадлежит 4-й четверти плоскости UV.

Итак, область D отображается функцией $w = \cos z$ на внутренность 4-й четверти комплексной плоскости UV.

г) Имеем $w = \dfrac{2}{z-1} = \dfrac{2}{x-1+iy} = \dfrac{2(x-1-iy)}{(x-1)^2+y^2}$, т. е. $u =$

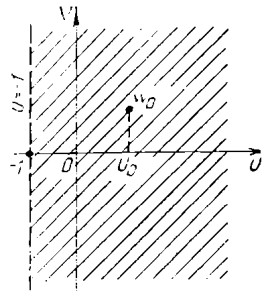


Рис. 15.14

$= \dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$, $v = -\dfrac{2y}{(x-1)^2+y^2}$. Зададим окружность $x^2+y^2=1$ параметрически: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Образом ее на плоскости UV служит линия, параметрические уравнения которой

$$u = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2} = \frac{2(\cos t - 1)}{(\cos t - 1)^2 + \sin^2 t} = \frac{2(\cos t - 1)}{2(1-\cos t)} = -1;$$

$$v = -\frac{2y}{(x-1)^2+y^2} = -\frac{2\sin t}{2(1-\cos t)} = -2\operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

где $t \in [0, 2\pi]$. Это прямая $u = -1$ (рис. 15.14).

Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ — произвольная точка плоскости $\mathbf{C}_z$, лежащая вне круга $x^2+y^2 \leqslant 1$, т. е. $|z_0| = \sqrt{x_0^2+y_0^2} > 1$. Эта точка функцией $w = \dfrac{2}{z-1}$ преобразуется в точку $w_0 = u_0 + iv_0 = \dfrac{2(x_0-1)}{(x_0-1)^2+y_0^2} + i\dfrac{-2y_0}{(x_0-1)^2+y_0^2}$. Отсюда

$$u_0 = \operatorname{Re} w_0 = \frac{2(x_0-1)}{(x_0-1)^2+y_0^2} = \frac{2(x_0-1)}{x_0^2+y_0^2-2x_0+1} > \frac{2x_0-2-\left(x_0^2+y_0^2-1\right)}{x_0^2+y_0^2-2x_0+1} = -1,$$

так как $x_0^2+y_0^2-1>0$.

Итак, любая точка z_0, лежащая вне круга $x^2+y^2 \leqslant 1$, отображается в точку w_0, для которой $\operatorname{Re} w_0 > -1$, т. е. в точку, лежащую правее прямой $u = -1$ (рис. 15.14). Значит, внешность круга $x^2+y^2 \leqslant 1$ отображается функцией $w = 2/(z-1)$ на полуплоскость UV, расположенную правее линии $u = -1$.

15.2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Производная функции комплексной переменной. Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0. *Производной* функции f в точке z_0 называется число, обозначаемое $f'(z_0)$ и равное пределу отношения $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ при $z \to z_0$, если этот предел существует. Итак, по определению,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}. \tag{15.25}$$

Положив $z - z_0 = \Delta z$, $f(z) - f(z_0) = \Delta f(z_0)$, из формулы (15.25) получим другое, эквивалентное определение производной $f'(z_0)$:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}. \tag{15.26}$$

Функция $w = f(z)$, имеющая в точке z_0 производную, называется *дифференцируемой* в этой точке. Функция называется *дифференцируемой в области*, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Дифференцируемость функции $w = f(z)$ в точке z_0 означает, что ее приращение $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \Delta f(z_0)$ представляется в виде

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(|\Delta z|), \qquad (15.27)$$

где A — некоторое комплексное число; $o(|\Delta z_0|)$ удовлетворяет соотношению $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z} = 0$.

В самом деле, поскольку функция $f(x)$ дифференцируема в точке z_0, из равенства (15.26) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что

$$\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$$

если $0 < |\Delta z| < \delta$. Отсюда

$$|f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) - f'(z_0)\Delta z| < \varepsilon |\Delta z|,$$

что, согласно соотношению (2.45), ч. I, равносильно равенству (15.27) при $A = f'(z_0)$.

Если же выполнено соотношение (15.27), то, разделив его на $\Delta z \neq 0$ и перейдя к пределу при $\Delta z \to 0$, получим $f'(z_0) = A$.

Таким образом, равенство (15.27) является *необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции* $w = f(z)$ в точке z_0. Так как $A = f'(z_0)$, перепишем его в виде

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|). \qquad (15.28)$$

Отсюда, в частности, следует, что *функция* $f(z)$, *дифференцируемая в точке* z_0, *непрерывна в ней*.

Из определения производной функции комплексной переменной и свойств пределов следуют все известные из курса математического анализа правила дифференцирования. Приведем формулировки некоторых из них.

1° Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — дифференцируемые в точке z_0 функции, то функции $\alpha f_1(z) \pm \beta f_2(z)$, $(\alpha, \beta \in \mathbf{C})$, $f_1(z) f_2(z)$, $f_1(z)/f_2(z)$ $(f_2(z_0) \neq \neq 0)$ дифференцируемы в точке z_0, причем

$$(\alpha f_1(z) \pm \beta f_2(z))' = \alpha f_1'(z) \pm \beta f_2'(z);$$

$$(f_1(z) f_2(z))' = f_1'(z) f_2(z) + f_1(z) f_2'(z);$$

$$\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right)' = \frac{f_1'(z) f_2(z) - f_1(z) f_2'(z)}{f_2^2(z)}.$$

2°. Если $w = f(z)$ имеет в точке z производную $f'(z)$, а функция $W = F(w)$ имеет в точке $w = f(z)$ производную $F'(w)$, то сложная функция $W = F(f(z))$ дифференцируема в точке z, причем

$$W' = (F(f(z)))' = F'(w) f'(z), \quad w = f(z).$$

3°. Если $w = f(z)$ — взаимно однозначная функция в окрестности точки z и $z = f^{-1}(w)$ — обратная ей функция, то

$$f'(z) = \frac{1}{(f^{-1}(w))'} \text{ или } (f^{-1}(w))' = \frac{1}{f'(z)},\ f'(z) \neq 0.$$

Условие Коши — Римана. В определении производной (15.25) предполагается, что z стремится к z_0 различными путями, но предел отношения $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ для дифференцируемой функции $f(z)$ должен быть один и тот же. Соответствует ли свойство дифференцируемости функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ какому-либо простому свойству функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$?

Справедлива

Теорема 15.1. Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют частные производные первого порядка в точке (x_0, y_0), удовлетворяющие соотношениям:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y};\ \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \quad (15.29)$$

При этом

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}. \quad (15.30)$$

Соотношения (15.29) называются *условиями Коши — Римана.*

□ Предел (15.25) не должен зависеть от пути стремления z к $z_0 = x_0 + iy_0$. Выберем два возможных пути: 1) $z \to z_0$ по прямой, параллельной действительной оси X; 2) $z \to z_0$ по прямой, параллельной мнимой оси Y (рис. 15.15).

В первом случае $z_0 = x_0 + iy_0$, $z = x + iy_0$ и, значит, $z - z_0 = x - x_0$. Тогда

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(u(x, y_0) + iv(x, y_0)) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}. \quad (15.31)$$

Отсюда вследствие существования предела в левой части равенства (15.31), равного $f'(z_0)$, получаем, что предел его правой части равен $\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$. Таким образом, справедливо равенство

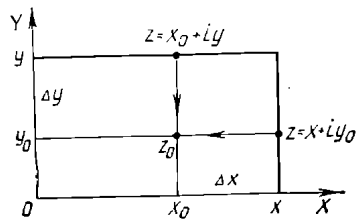


Рис. 15.15

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \quad (15.32)$$

Во втором случае $z_0 = x_0 + iy_0$, $z = x_0 + iy$, откуда $z - z_0 = i(y - y_0)$. Тогда

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{(u(x_0,\ y)+iv(x_0,\ y))-(u(x_0,\ y_0)+iv(x_0,\ y_0))}{i(y-y_0)}=$$
$$=-i\lim_{y\to y_0}\frac{u(x_0,\ y)-u(x_0,\ y_0)}{y-y_0}+\lim_{y\to y_0}\frac{v(x_0,\ y)-v(x_0,\ y_0)}{y-y_0}.$$

Отсюда, в силу существования $f'(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, получаем

$$f'(z_0)=-i\frac{\partial u(x_0,\ y_0)}{\partial y}+\frac{\partial v(x_0,\ y_0)}{\partial y},\qquad(15.33)$$

что доказывает справедливость формул (15.30).

Из равенств (15.32) и (15.33) имеем

$$\frac{\partial u(x_0,\ y_0)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x_0,\ y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0,\ y_0)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x_0,\ y_0)}{\partial y}.$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем условия Коши — Римана (15.29). ■

Из равенств (15.29) и (15.30) следует, что производная аналитической функции вычисляется по одной из приведенных формул:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.\qquad(15.34)$$

Замечание. Произвольная комплекснозначная функция $u(x,\ y)+iv(x,\ y)$, вообще говоря, не является дифференцируемой в смысле определения (15.25), даже если функции $u(x,\ y)$ и $v(x,\ y)$ дифференцируемы. Это связано с тем, что, кроме дифференцируемости, функции $u(x,\ y)$ и $v(x,\ y)$ должны быть связаны между собой условиями Коши — Римана. Например, пусть $f(x,\ y)=x-iy$. Тогда $u'_x=1$, $v'_y=-1$, $u'_y=0$, $v'_x=0$, т. е. условия Коши — Римана не выполняются ни в одной точке $(x,\ y)$. Следовательно, функция $f(x,\ y)=x-iy$ не дифференцируема ни в одной точке.

Условия Коши — Римана являются необходимыми условиями дифференцируемости функции $f(z)$ в точке z_0. Достаточные условия дифференцируемости функций комплексной переменной доказываются в следующей теореме.

Теорема 15.2. Пусть функции $u(x,\ y)$ и $v(x,\ y)$ имеют непрерывные частные производные в точке $(x_0,\ y_0)$, удовлетворяющие условиям Коши — Римана. Тогда функция $w=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$ дифференцируема в точке $z_0=x_0+iy_0$.

□ Пусть функции $u(x,\ y)$ и $v(x,\ y)$ непрерывно дифференцируемы в точке $(x_0,\ y_0)$. Для $z=x_0+\Delta x+i(y_0+\Delta y)$ имеем $\Delta z=z-z_0=\Delta x+i\Delta y$. Найдем приращение Δu и Δv. Вследствие дифференцируемости функций u и v в точке $(x_0,\ y_0)$ получим:

$$\Delta u=u(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-u(x_0,\ y_0)=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+o_1(|\Delta z|);$$

$$\Delta v=v(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-v(x_0,\ y_0)=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+o_2(|\Delta z|).$$

Отсюда

$$\Delta u + i\Delta v = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + o_1(|\Delta z|) + io_2(|\Delta z|).$$

Используя условия Коши — Римана (15.25), получаем

$$\Delta u + i\Delta v = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y + o(|\Delta z|) =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta z|) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z + o(|\Delta z|),$$

где $o(|\Delta z|) = o_1(|\Delta z|) + io_2(|\Delta z|)$.

Разделив обе части полученного равенства на $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ и перейдя к пределу при $\Delta z \to 0$, будем иметь

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta z} = \frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f'(z_0),$$

т. е. функция $w = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке z_0. ■

Условия Коши — Римана в полярных координатах. Так как комплексное число $z = x + iy = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, то для функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в полярных координатах ρ и φ имеем

$$f(z) = f(\rho e^{i\varphi}) = u(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) + iv(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi),$$

т. е.

$$u(x, y) = u(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi); \quad v(x, y) = v(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi). \quad (15.35)$$

Из равенств (15.35) по цепочному правилу

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi;\\
\frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x}\rho\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\rho\cos\varphi;\\
\frac{\partial v}{\partial \rho} &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi;\\
\frac{\partial v}{\partial \varphi} &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial x}\rho\sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial y}\rho\cos\varphi.
\end{aligned}\right\} \quad (15.36)$$

Из первого и четвертого равенств (15.36) с учетом того, что для дифференцируемой функции $u_x' = v_y'$, $u_y' = -v_x'$, получим

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y}\cos\varphi - \frac{\partial v}{\partial x}\sin\varphi &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\\
\frac{\partial v}{\partial y}\rho\cos\varphi - \frac{\partial v}{\partial x}\rho\sin\varphi &= \frac{\partial v}{\partial \varphi}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right).$$

Аналогично из второго и третьего равенств (15.36) имеем:

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial v}{\partial y}\rho\sin\varphi - \frac{\partial v}{\partial x}\rho\cos\varphi &= \frac{\partial u}{\partial \varphi}\\
\frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi &= \frac{\partial v}{\partial \rho}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho\frac{\partial v}{\partial \rho}\right).$$

Таким образом, условия Коши — Римана в полярных координатах имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi};\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho\frac{\partial v}{\partial \rho},\ \rho > 0. \qquad (15.37)$$

Умножим второе из равенств (15.36) на i и вычтем получившееся соотношение из второго равенства (15.36):

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \rho\sin\varphi\left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \rho\cos\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) =$$
$$= \rho\sin\varphi\left(i^2\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \rho\cos\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) i\rho\sin\varphi + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\rho\cos\varphi.$$

Но в соответствии с равенством (15.30) $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = f'(z)$. Таким образом,

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi} = f'(z)\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = zf'(z).$$

Отсюда получаем, что в полярных координатах производная $f'(z)$, согласно условиям Коши — Римана (15.37), имеет вид

$$f'(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = \frac{\rho}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + i\frac{\partial v}{\partial \rho}\right),\ z \neq 0. \qquad (15.38)$$

Пример. 1. Пусть $f(z) = \ln z = \ln\rho + i\varphi$, где $\varphi = \arg z$. Имеем $u = \ln\rho$, $v = \varphi$. Тогда $\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}$, $\frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0$; $\frac{\partial v}{\partial \rho} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 1$. Отсюда $\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial v}{\partial \rho} = 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}$, т. е. условия Коши — Римана выполнены, и потому в силу равенств (15.38)

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{z}.$$

Аналитические функции. Функция $w = f(z) = u(x, y) + v(x, y)$ называется *аналитической в точке* z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w = f(z)$ называется *аналитической в области* D, если она аналитична в каждой точке этой области. Точка z_0, в которой функция $f(z)$ аналитична, называется *правильной точкой* функции. Если же функция $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности точки z_0 и не аналитична в самой точке z_0 или не определена в ней, то z_0 называется *особой точкой* функции $f(z)$.

Пример 2. Функция $e^z = e^x\cos y + ie^x\sin y$ аналитична на всей комплексной плоскости, так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y = \frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

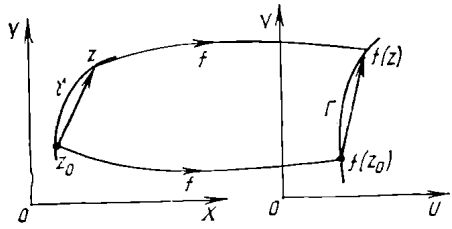


Рис. 15.16

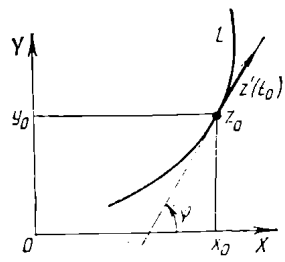


Рис. 15.17

По формуле (15.34)

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

Используя определение элементарных функций комплексного переменного, получим следующую таблицу производных:

1) $(a^z)' = a^z \ln a$, $a \neq 1$; 2) $(e^z)' = e^z$; 3) $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$; 4) $(\ln z)' = 1/z$; 5) $(\sin z)' = \cos z$; 6) $(\cos z)' = -\sin z$; 7) $(\operatorname{tg} z)' = 1/\cos^2 z$; 8) $(\operatorname{ctg} z)' = -1/\sin^2 z$; 9) $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$; 10) $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$; 11) $(\operatorname{th} z)' = 1/\operatorname{ch}^2 z$; 12) $(\operatorname{cth} z)' = -1/\operatorname{sh}^2 z$; 13) $(\arcsin z)' = 1/\sqrt{1-z^2}$; 14) $(\arccos z)' = -1/\sqrt{1-z^2}$; 15) $\operatorname{arctg} z = 1/(1+z^2)$; 16) $\operatorname{arcctg} z = -1/1+z^2)$.

Пример 3. $(\ln(\sin(z^2 - \sqrt{z})))' = \dfrac{(2z - 1/(2\sqrt{z}))\cos(z^2 - \sqrt{z})}{\sin(z^2 - \sqrt{z})} = \dfrac{4z\sqrt{z} - 1}{2\sqrt{z}} \operatorname{ctg}(z^2 - \sqrt{z})$.

Геометрический смысл модуля и аргумента производной аналитической функции. Пусть функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z_0 и некоторой ее окрестности. Тогда существует предел

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Отсюда

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|. \qquad (15.39)$$

При движении точки z в плоскости XY по некоторой линии γ соответствующая ей точка $w = f(z)$ будет описывать в плоскости UV линию Γ, являющуюся образом линии γ (рис. 15.16). Величина $|z - z_0|$ численно равна длине вектора с началом в точке z_0 и концом в точке z на плоскости XY, а $|f(z) - f(z_0)|$ — длине векто-

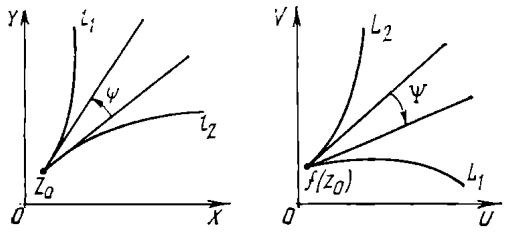


Рис. 15.18

ра с началом в точке $f(z_0)$ и концом в точке $f(z)$ на комплексной плоскости UV. Тогда модуль $\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|$ равен отношению этих длин. Величина $k=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$ называется *линейным растяжением кривой* γ в точке z_0 при отображении $w=f(z)$. Следовательно, линейное растяжение в точке z_0 не зависит от вида и направления кривой и равно $|f'(z_0)|$. В этом и состоит *геометрический смысл модуля производной* $f'(z_0)$.

Рассмотрим теперь гладкую кривую l: $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, на плоскости XY, проходящую через точку $z_0=z(t_0)=x(t_0)+iy(t_0)=x_0+iy_0$, $t_0\subset[\alpha, \beta]$. Пусть φ — угол между касательной к кривой l в точке z_0 и положительным направлением оси X (рис. 15.17). Тогда очевидно, что $\varphi=\arg z'(t_0)$. Пусть $L=f(l)$ — образ кривой l на плоскости UV при отображении f, т. е. L: $w=f(z(t))$, $t\in[\alpha, \beta]$. По правилу дифференцирования сложной функции получаем $w'(t_0)=f'(z_0)z'(t_0)$. Предположим, что $f'(z_0)\neq 0$ (при $f'(z_0)=0$ аргумент $f'(z_0)$ не определен). Тогда

$$\varphi'=\arg w'(t_0)=\arg f'(z_0)+\arg z'(t_0)=\arg f'(z_0)+\varphi, \quad (15.40)$$

поскольку $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$.

Величина $\varphi'-\varphi$ называется *углом поворота кривой* l в точке z_0 при отображении f. Из равенства (15.40) следует, что если $f'(z_0)\neq 0$, то угол поворота в точке z_0 не зависит от кривой и равен $\arg f'(z_0)$.

Таким образом, если $f'(z_0)\neq 0$, то *все кривые, проходящие через точку* z_0 *на плоскости* XY, *поворачиваются при отображении* $f(z)$ *на один и тот же угол* $\arg f'(z_0)$. В этом и состоит *геометрический смысл аргумента производной аналитической функции*.

Итак, если $f(z)$ — аналитическая функция и $f'(z_0)\neq 0$, отображение $w=f(z)$ сохраняет неизменными по величине и направлению углы между кривыми l_1 и l_2, проходящими через точку z_0 на плоскости XY, и их образами $L_1=f(l_1)$ и $L_2=f(l_2)$, проходящими через точку $f(z_0)$ на плоскости UV, т. е. $\psi=\Psi$ (рис. 15.18). Такое отображение называется *конформным*.

Гармонические функции. Пусть функция $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ аналитична в области D, причем функции $u(x, y)$ и

$v(x, y)$ имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Так как в D выполнены условия Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{15.41}$$

то, дифференцируя первое из этих равенств по x, а второе — по y, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Отсюда с учетом равенства $v''_{xy} = v''_{yx}$ будем иметь $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Дифференцируя первое из равенств (15.41) по y, а второе — по x и вычитая получившиеся при этом соотношения, будем иметь $\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

Итак, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяют в D уравнению Лапласа

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \tag{15.42}$$

т. е. *действительная $u(x, y)$ и мнимая $v(x, y)$ части аналитической функции $f(z) = u + iv$ являются гармоническими в области D функциями.*

Гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющие в области D условиям Коши — Римана, называют *сопряженными*. Таким образом, выше показано, что действительная и мнимая части аналитической в области D функции являются в ней сопряженными.

Возникает вопрос: можно ли для заданной в области D произвольной действительной гармонической функции $u(x, y)$ найти сопряженную функцию $v(x, y)$, такую, что функция $u(x, y) + iv(x, y)$ будет аналитической в области D?

Имеет место

Теорема 15.3. Всякая гармоническая в односвязной области D функция служит действительной (мнимой) частью некоторой аналитической в этой области функции.

□ Пусть $u(x, y)$ — гармоническая в односвязной области D функция. Рассмотрим дифференциальную форму

$$W = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = Pdx + Qdy.$$

Так как, согласно уравнению (15.42),

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

то, по следствию из теоремы 12.1, форма $W = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $v(x, y)$, т. е.

$$dv(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

Отсюда для функций u и v получаем условия Коши — Римана, т. е. функции u и v сопряжены в области D.

Так как функция $v(x, y)$ восстанавливается по ее полному дифференциалу с точностью до произвольной действительной постоянной, то функция $f(z) = u + iv$ определяется тем самым с точностью до произвольной чисто мнимой постоянной.

Аналогично можно показать, что в односвязной области D аналитическая функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по своей мнимой части $v(x, y)$ определяется с точностью до действительно постоянного слагаемого. Для этого достаточно ввести в рассмотрение дифференциальную форму $W = \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy$ и повторить рассуждения, приведенные в доказательстве первой части теоремы. ■

По данной функции $u(x, y)$ $(v(x, y))$ сопряженную функцию $v(x, y)$ $(u(x, y))$ можно определить, согласно формуле (12.39), с помощью соотношений

$$v(x, y) = -\int_0^1 \frac{\partial u(tx, ty)}{\partial y} x dt + \int_0^1 \frac{\partial u(tx, ty)}{\partial x} y dt; \qquad (15.43)$$

$$u(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial v(tx, ty)}{\partial y} x dt - \int_0^1 \frac{\partial v(tx, ty)}{\partial x} y dt, \qquad (15.44)$$

если частные производные функций u и v определены в выпуклой окрестности начала координат.

В общем случае для восстановления аналитической функции по ее известной действительной или мнимой части следует исходить из условий Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пусть, например, известна действительная часть $u(x, y)$ аналитической функции $f(z) = u + iv$.

Из первого равенства Коши — Римана получаем

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\right) \Rightarrow v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + \varphi(x), \qquad (15.45)$$

где $\varphi(x)$ — некоторая функция.

Найденную функцию $v(x, y)$ подставляем во второе уравнение Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\partial u}{\partial x} dy - \varphi'(x).$$

Отсюда находим функцию $\varphi(x)$. Подставив ее в равенство (15.45), получим искомую функцию $v(x, y)$.

Аналогично, если известна функция $v(x, y)$, то

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Rightarrow u=\int\frac{\partial v}{\partial y}dx+\psi(y), \tag{15.46}$$

где $\psi(y)$ — некоторая функция. Отсюда и из второго условия Коши — Римана следует

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{\partial v}{\partial y}dx+\psi'(y)=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Найденную из этого соотношения функцию $\psi(y)$ подставим в формулу (15.46) и получим искомую функцию $u(x, y)$.

Пример 4. Восстановить аналитическую функцию $f(z)=u+iv$ по известной ее действительной части $u=1-e^x\sin y$.

□ Так как

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-e^x\sin y\right)\Rightarrow v=-\int e^x\sin y dy+\varphi(x)=e^x\cos y+\varphi(x),$$

то из уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ будем иметь

$$(-e^x\cos y=-e^x\cos y-\varphi'(x))\Rightarrow(\varphi'(x)=0)\Rightarrow(\varphi(x)=C=\text{const}).$$

В таком случае

$$v=e^x\cos y+\varphi(x)=e^x\cos y+C.$$

Следовательно,

$$f(z)=u+iv=1-e^x\sin y+i(e^x\cos y+C)=1+i^2e^x\sin y+$$
$$+ie^x\cos y+iC=i(e^x\cos y+ie^x\sin y)+1+iC=ie^z+1+iC.$$

Пример 5. Восстановить аналитическую функцию $f(z)=u+iv$ по ее известной мнимой части $v=(e^{2x}-1)\cdot\dfrac{\sin y}{e^x}$, причем $f(0)=2$.

□ Из уравнения Коши — Римана $u'_x=-v'_y$ имеем

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}=(e^x-e^{-x})\cos y\right)\Rightarrow u=\int(e^x-e^{-x})\cos y dx+\psi(y)=$$
$$=(e^x+e^{-x})\cos y+\psi(y).$$

Используя второе уравнение Коши — Римана $u'_y=-v'_x$, получаем

$$(-(e^x+e^{-x})\sin x+\psi'(y)=-(e^x+e^{-x})\sin y)\Rightarrow\psi(y)=C=\text{const}.$$

Тогда $u=(e^x+e^{-x})\cos y+C$, а функция

$$f(z)=u+iv=(e^x+e^{-x})\cos y+C+i(e^x+e^{-x})\sin y=$$
$$=e^x(\cos y+i\sin y)+e^{-x}(\cos y-i\sin y)+C=e^z+e^{-z}+C.$$

Найдем C из условия $f(0)=2$. Имеем $(f(0)=2+C=2)\Rightarrow(C=0)$. Итак, $f(z)=e^z+e^{-z}=2\operatorname{ch}z$.

Пример 6. Найти сопряженную функцию $u(x, y)$ для гармонической функции $v=x^2-y^2-x$.

□ Имеем $v'_x=2x-1$, $v'_y=-2y$. По формуле (15.44)

$$u=\int_0^1-2tyxdt-\int_0^1(2tx-1)ydt=-xyt^2\Big|_{t=0}^{t=1}-$$
$$-(xyt^2-yt)\Big|_{t=0}^{t=1}=-2xy+y.$$

Нетрудно убедиться, что условия Коши — Римана для функций $u = -2xy + y$ и $v = x^2 - y^2 - x$ выполняются. Тогда

$$f(z) = u + iv = -2xy + y + i(x^2 - y^2 - x) = i^2 \cdot 2xy + ix^2 + i^3y^2 - i^2y - ix = i(x^2 + 2ixy + i^2y^2) - (x + iy) = iz^2 - iz.$$

15.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Интеграл от функции комплексной переменной и его вычисление. Пусть в области D комплексной плоскости определена однозначная и непрерывная функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ и l — кусочно-гладкая ориентированная кривая в D с начальной точкой A и конечной точкой B (рис. 15.19). Кривую l разобьем на части l_k точками $z_0, z_1, \ldots, z_n$, взятыми в порядке следования по l от $z_0 = A$ до $z_n = B$. Пусть Δl_k — длина части дуги l_k с началом в точке z_{k-1} и концом в точке z_k, а $\Delta = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta l_k$. На каждой части l_k возьмем произвольную точку $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ и составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_z)\,\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,(z_k - z_{k-1}). \qquad (15.47)$$

Если существует конечный предел интегральных сумм (15.47) при $\Delta \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения кривой l на части l_k, ни от выбора точек $\zeta_k \in l_k$, то он называется *интегралом от функции $f(z)$ по кривой l* и обозначается $\int\limits_l f(z)\,dz$.

Итак, по определению,

$$\int_l f(z)\,dz = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,\Delta z_k. \qquad (15.48)$$

Так как $z_k = x_k + iy_k$, $f(z_k) = u(x_k, y_k) + iv(x_k, y_k)$, $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, то

$$f(\zeta_k)\,\Delta z_k = (u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k))\,(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= (u(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k) + i(v(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k).$$

В таком случае интегральная сумма (15.47) приобретает вид

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} ((u(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k) + i(v(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k)).$$

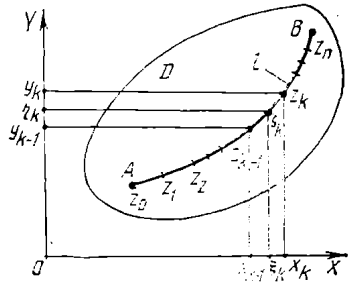


Рис. 15.19

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta \to 0$. Тогда $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k \to 0$ и $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta y_k \to 0$. В результате получим

$$\int_l f(z)\,dz = \int_l u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i\int_l v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy. \tag{15.49}$$

Отсюда следует, что существование интеграла (15.48) равносильно существованию криволинейных интегралов

$$\int_l u dx - v dy; \quad \int_l v dx + u dy. \tag{15.50}$$

Тем самым вычисление интеграла от функции $f(z) = u + iv$ сводится к вычислению криволинейных интегралов (15.50) от функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ действительных переменных x и y.

Если гладкая кривая l задана уравнением $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то, согласно формуле (12.20), из равенства (15.49) получаем

$$\int_l f(z)\,dz = \int_l u dx - v dy + i\int_l v dx + u dy =$$

$$= \int_\alpha^\beta (u(x(t), y(t))\, x'(t) - v(x(t), y(t))\, y'(t))\,dt +$$

$$+ i\int_\alpha^\beta (v(x(t), y(t))\, x'(t) + u(x(t), y(t))\, y'(t))\,dt. \tag{15.51}$$

Перепишем равенство (15.51) в виде

$$\int_\alpha^\beta ((ux' - vy') + i(vx' + uy'))\,dt = \int_\alpha^\beta (u + iv)(x' + iy')\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta f(z(t))\, z'(t)\,dt.$$

Таким образом,

$$\int_l f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\, z'(ts)\,dt, \tag{15.52}$$

где $z = z(t)$ — уравнение гладкой кривой l, $t \in [\alpha, \beta]$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_l |z|\,dz$, где l: $\{|z| = \sqrt{2},\ 3\pi/4 \leqslant \arg z \leqslant 5\pi/4\}$.

□ Кривая l представляет собой часть окружности радиусом $\sqrt{2}$ с центром в точке (0, 0), заключенную между лучами $\arg z = 3\pi/4$ и $\arg z = 5\pi/4$. Она описывается уравнением $z = \sqrt{2}\, e^{it}$, $3\pi/4 \leqslant t \leqslant 5\pi/4$. По формуле (15.52)

$$\int_l |z|\,dz = \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\, ie^{it}dt = 2i\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} (\cos t + i\sin t)\,dt =$$

$$= 2i(\sin t - i\cos t)\Big|_{3\pi/4}^{5\pi/4} = -2\sqrt{2}\, i.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma}(z-a)^m\,dz$, где Γ — окружность радиусом R с центром в точке a, m — произвольное целое число.

□ В соответствии с равенством (15.5) уравнение кривой Γ имеет вид $z=a+Re^{it}$, $0\leqslant t<2\pi$. Тогда по формуле (15.52)

$$\oint\limits_{\Gamma}(z-a)^m\,dz=\int\limits_0^{2\pi}(Re^{it})^m\,Rie^{it}dt=iR^{m+1}\int\limits_0^{2\pi}e^{i(m+1)t}dt=$$

$$=\begin{cases}i\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}dt=2\pi i, & m=-1;\\ \dfrac{R^{m+1}}{m+1}\,e^{i(m+1)t}\Big|_0^{2\pi}=0, & m\neq -1.\end{cases}$$

Таким образом,

$$\oint\limits_{\Gamma}(z-a)^m\,dz=\begin{cases}2\pi i, & m=-1;\\ 0, & m\neq -1.\end{cases}\tag{15.53}$$

Свойства интеграла от функции комплексной переменной непосредственно следуют из соответствующих свойств криволинейных интегралов.

1°. (Линейность.)

$$\int\limits_l(\alpha f(z)+\beta g(z))\,dz=\alpha\int\limits_l f(z)\,dz+\beta\int\limits_l g(z)\,dz,$$

где $\alpha,\ \beta\in\mathbf{C}$.

2°. При изменении ориентации кривой интеграл меняет знак на противоположный: $\int\limits_{l^+}f(z)\,dz=-\int\limits_{l^-}f(z)\,dz$.

3°. (Оценка модуля интеграла.) Пусть функция $f(z)$ непрерывна на кривой l. Из определения интегральной суммы (15.47) получаем

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\,\Delta z_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)|\,|\Delta z_k|=\sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)|\,\Delta l_k,\tag{15.54}$$

где Δl_k — длина части l_k с начальной точкой z_{k-1} и конечной z_k. Перейдя в неравенстве (15.54) к пределу при $\Delta\to 0$, будем иметь

$$\left|\int\limits_l f(z)\,dz\right|\leqslant\int\limits_l|f(z)|\,dl.\tag{15.55}$$

Из неравенства (15.55) при $M=\max\limits_{z\in l}|f(z)|$ получаем неравенство

$$\left|\int\limits_l f(z)\,dz\right|\leqslant ML,\tag{15.56}$$

где L — длина дуги l.

Соотношения (15.55) и (15.56) дают оценку модуля интеграла (15.48).

Интегральная теорема Коши. Эта теорема является одним из важнейших результатов теории функций комплексной переменной.

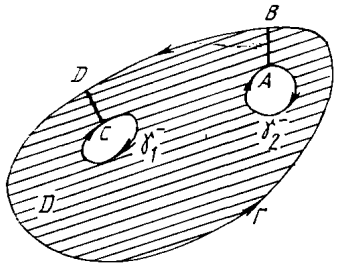


Рис. 15.20

Теорема 15.4. Если функция $f(z) = u + iv$ аналитична в односвязной замкнутой области D с границей Γ, то

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0. \qquad (15.57)$$

□ Согласно равенствам (15.49),

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma} u\,dx - v\,dy + i\oint_{\Gamma} v\,dx + u\,dy.$$

Применив к криволинейным интегралам формулу Грина (12.44), согласно условиям Коши — Римана, получим

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \iint_{D}\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy + i\iint_{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy = 0. \blacksquare$$

Следствие (интегральная теорема Коши для многосвязной области). Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в замкнутой многосвязной области D с границей $\Gamma \cup \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k$, где Γ — внешний контур области D, а γ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — замкнутые непересекающиеся контуры, расположенные внутри D. Тогда

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)\,dz. \qquad (15.58)$$

□ Рассмотрим трехсвязную область D с внешним контуром Γ и внутренними контурами γ_1 и γ_2 (рис. 15.20). Проведем две линии (два разреза) AB и CD. Тогда, добавив к границе области D отрезки AB, BA, CD и DC, область D превратим в односвязную. По теореме 15.4

$$\oint_{\Gamma} + \oint_{\gamma_1^-} + \oint_{\gamma_2^-} + \int_{AB} + \int_{BA} + \int_{CD} + \int_{DC} = 0, \qquad (15.59)$$

где γ_k^-, $k = 1, 2$, — контур, имеющий ориентацию, противоположную ориентации контура Γ, т. е. он ориентирован по часовой стрелке.

Так как

$$\int_{AB} = -\int_{BA}; \quad \int_{CD} = -\int_{DC}; \quad \oint_{\gamma_k^-} = -\oint_{\gamma_k},$$

то отсюда и из равенства (15.59) получим формулу (15.58). ■

Интеграл с переменным верхним пределом. Пусть $f(z) = u + iv$ — аналитическая в области D функция. Так как для криволинейных интегралов (15.50) в силу соотношений Коши — Римана выполнены условия $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, то по теореме 12.1 эти интегралы не зависят от пути интегрирования. Отсюда следует, что ин-

теграл $\int_l f(z)\,dz$ не зависит от вида кривой l, расположенной в области D и соединяющей точки z_0 и z, а зависит лишь от начальной z_0 и конечной z точек. В этом случае интеграл принято обозначать

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds. \tag{15.60}$$

Имеет место

Теорема 15.5 (Мореры*). Пусть функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и интеграл $\int_l f(z)\,dz$ не зависит от пути интегрирования $l \in D$. Тогда функция (15.60) аналитична в D, причем $F'(z) = f(z)$.

□ Пусть z_1 — произвольная точка из D. Так как $z - z_1 = \int_{z_1}^{z} ds$, то

$$|F(z) - F(z_1) - f(z_1)(z - z_1)| = \left|\int_{z_0}^{z} f(s)\,ds - \int_{z_0}^{z_1} f(s)\,ds - f(z_1)(z - z_1)\right| =$$

$$= \left|\int_{z_0}^{z_1} f(s)\,ds + \int_{z_1}^{z} f(s)\,ds - \int_{z_0}^{z_1} f(s)\,ds - \int_{z_1}^{z} f(z_1)\,ds\right| =$$

$$= \left|\int_{z_1}^{z} (f(s) - f(z_1))\,ds\right| \leqslant \int_{z_1}^{z} |f(s) - f(z_1)|\,ds. \tag{15.61}$$

Вследствие непрерывности $f(z)$ для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое, что $|f(s) - f(z_1)| < \varepsilon$, если только $|s - z_1| < \delta$. Тогда при $|z - z_1| < \delta$ имеем $|s - z_1| < \delta$ и из неравенства (15.61) получаем $|F(z) - F(z_1) - f(z_1)(z - z_1)| < \varepsilon |s - z_1|$, т. е.

$$|F(z) - F(z_1) - f(z_1)(z - z_1)| = o(|z - z_1|).$$

Отсюда, согласно формуле (15.27), следует, что $F'(z_1) = f(z_1)$. ■

Следствие. Пусть $f(z)$ непрерывна в области D и интеграл от этой функции по любой замкнутой кривой, лежащей в D, равен нулю. Тогда функция $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ аналитична в D, причем $F'(z) = f(z)$.

Функция $F(z)$ называется *первообразной* для функции $f(z)$ в области D, если $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in D$. Если $F(z)$ — первообразная для $f(z)$, то и $F(z) + C$ (C — постоянная, в общем случае комплексная) — тоже первообразная для $f(z)$. Любые две первообразные $F(z)$ и $\Phi(z)$ для функции $f(z)$ отличаются на постоянную.

Если $F(z)$ — первообразная для $f(z)$ в области D, то совокупность всех первообразных этой функции определяется выражением

* Г. Морера (1856—1909) — итальянский математик.

$F(z)+C$. Множество функций $F(z)+C$ называется *неопределенным интегралом* от $f(z)$ и обозначается $\int f(z)\,dz$. Таким образом,

$$\int f(z)\,dz = F(z)+C. \tag{15.62}$$

Методы вычисления неопределенных интегралов от аналитических функций в комплексном анализе те же, что и в действительном. Так, например, справедливы формулы:

$$\int e^z dz = e^z + C;\ \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1;$$

$$\int \frac{dz}{z} = \operatorname{Ln} z + C;\ \int \sin z dz = -\cos z + C;\ \ldots$$

Пусть $F(z)$ является первообразной для функции $f(z)$ в односвязной области D. Тогда, согласно теореме 15.5, интеграл $\int\limits_{z_0}^{z} f(s)\,ds$ также является первообразной для $f(z)$. По формуле (15.62)

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(s)\,ds = F(z)+C. \tag{15.63}$$

При $z=z_0$ из формулы (15.63) имеем $(F(z_0)+C=0) \Rightarrow$ $\Rightarrow (C=-F(z_0))$. Отсюда и из равенства (15.63) получаем *формулу Ньютона — Лейбница*

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(s)\,ds = F(z) - F(z_0). \tag{15.64}$$

Пример 3. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{l}(\sin z + z^5)\,dz$, где l — ломаная, соединяющая точки $z_0=0$, $z_1=1$ и $z_2=2i$.

□ Так как $\sin z + z^5$ — аналитическая функция на всей плоскости C, то интеграл I зависит только от начальной точки $z_0=0$ и конечной точки $z_2=2i$ ломаной, т. е.

$$\int\limits_{l}(\sin z + z^5)\,dz = \int\limits_{0}^{2i}(\sin z + z^5)\,dz = \left(-\cos z + \frac{z^6}{6}\right)\Bigg|_0^{2i} =$$

$$= -\cos 2i + \frac{(2i)^6}{6} + \cos 0 = -\operatorname{ch} 2 - \frac{29}{3}.$$

Пример 4. Доказать равенство

$$\int\limits_{-\infty+ib}^{+\infty+ib} e^{-z^2}dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx,$$

где интеграл в левой части вычисляется вдоль бесконечной прямой L: $y=b$ (рис. 15.21).

□ Рассмотрим интеграл $I=\oint\limits_{ABCDA} e^{-z^2}dz$ по замкнутому контуру, изображенному на рис. 15.21. Так как подынтегральная функция аналитична внутри этого контура, то по теореме Коши $I=0$, т. е.

$$\oint\limits_{ABCDA} e^{-z^2}dz = \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx + \int\limits_{R}^{R+ib} e^{-z^2}dz + \int\limits_{R+ib}^{-R+ib} e^{-z^2}dz + \int\limits_{-R+ib}^{-R} e^{-z^2}dz = 0$$

(здесь учтено, что на оси X комплексная переменная $z=x$). Покажем, что ин-

теграл $\int\limits_R^{R+ib} e^{-z^2}dz$ стремится к нулю при $R \to$ $\to +\infty$. Действительно, на отрезке BC имеем $x = R$, $y = t$, $t \in [0, b]$, т. е. $z = R + it$, $dz = idt$. Тогда

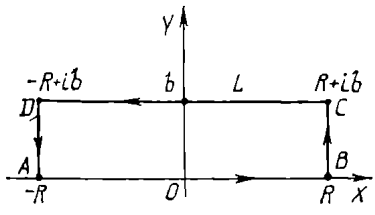


Рис. 15.21

$$\int\limits_R^{R+ib} e^{-z^2}dz = i\int\limits_0^b e^{-(R+it)^2}dt =$$

$$= ie^{-R^2}\int\limits_0^b e^{t^2-2Rti}dt.$$

Так как интеграл

$$\int\limits_0^b e^{t^2-2Rti}dt = \int\limits_0^b e^{t^2}(\cos 2Rt - i\sin 2Rt)\,dt$$

есть конечное число, то

$$\lim_{R\to+\infty} ie^{-R^2}\int\limits_0^b e^{t^2-2Rti}dt = 0.$$

Аналогично показывается, что

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{DA} e^{-z^2}dz = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R+ib}^{-R} e^{-z^2}dz = 0.$$

В таком случае при $R \to +\infty$ получаем

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx + \int\limits_{R+ib}^{-R+ib} e^{-z^2}dz\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx + \int\limits_{+\infty+ib}^{-\infty+ib} e^{-z^2}dz = 0\right),$$

т. е. $\int\limits_{-\infty+ib}^{+\infty+ib} e^{-z^2}dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx.$

Интегральная формула Коши. Эта формула связывает значение аналитической функции $f(z)$ в любой точке z области D со значением этой функции в граничных точках области D.

Справедлива

Теорема 15.6. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в замкнутой односвязной ориентированной области D с границей Г. Тогда для любой внутренней точки $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(s)}{s-z}\,ds. \qquad (15.65)$$

Формула (15.65) называется *интегральной формулой Коши.*

□ Пусть z — внутренняя точка D. Функция $F(s) = f(s)/(s-z)$ аналитична в замкнутой области D, кроме точки $s = z$. Так как z — внутренняя точка D, то можно взять $\rho > 0$, такое, что круг

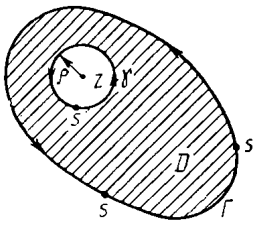


Рис. 15.22

$|s-z|\leqslant\rho$ и его граница γ будет принадлежать области D (рис.15.22). По теореме Коши для многосвязной области

$$\oint_{\Gamma}\frac{f(s)}{s-z}\,ds=\oint_{\gamma}\frac{f(s)}{s-z}\,ds=$$

$$=\oint_{\gamma}\frac{f(s)-f(z)+f(z)}{s-z}\,ds=$$

$$=\oint_{\gamma}\frac{f(s)-f(z)}{s-z}\,ds+f(z)\oint_{\gamma}\frac{ds}{s-z}. \tag{15.66}$$

Согласно формуле (15.53), второй интеграл в правой части равенства (15.66) равен $2\pi i$. Оценим первый интеграл $\oint_{\gamma}\frac{f(s)-f(z)}{s-z}ds$ по модулю. Так как $f(z)$ — непрерывная функция, то для любого $\varepsilon>0$ можно указать $\delta>0$, такое, что $|f(s)-f(z)|<\varepsilon$, если только $\rho=|s-z|<\delta$. Тогда при $\rho<\delta$, учитывая оценку (15.56), получаем

$$\left|\oint_{\gamma}\frac{f(s)-f(z)}{s-z}\,ds\right|\leqslant\oint_{\gamma}\frac{|f(s)-f(z)|}{|s-z|}\,ds<\frac{\varepsilon}{\rho}\cdot 2\pi\rho=2\pi\varepsilon.$$

Вследствие произвольности ε это означает, что первый интеграл справа в равенстве (15.66) равен нулю. Тем самым равенство (15.66) приобретает вид $\oint_{\Gamma}\frac{f(s)}{s-z}\,ds=2\pi i f(z)$, равносильный формуле (15.65). ■

Из теоремы 15.6 и интегральной теоремы Коши для многосвязной области следует

Теорема 15.7. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в замкнутой многосвязной области D с внешним контуром Γ и внутренними непересекающимися между собой контурами γ_k, $k=1, 2, \ldots, n$. Тогда для любой внутренней точки $z\in D$ справедлива *интегральная формула Коши для многосвязной области*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(s)}{s-z}\,ds-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\oint_{\gamma_k}\frac{f(s)}{s-z}\,ds. \tag{15.67}$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\oint_{|z-1|=1}\frac{z^2+1}{z^2-1}\,dz$.

□ Функция $(z^2+1)/(z^2-1)$ имеет две особые точки $z=\pm 1$. Так как точка $z=-1$ лежит вне окружности Γ: $|z-1|=1$, а точка $z=1$ — внутри ее, то представим подынтегральную функцию в виде $\frac{z^2+1}{z^2-1}=\frac{z^2+1}{z+1}\,\frac{1}{z-1}=\frac{f(z)}{z-1}$, где $f(z)=\frac{z^2+1}{z+1}$. По формуле Коши (15.65)

$$\oint_\Gamma \frac{z^2+1}{z^2-1}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-1}\,dz\right) = 2\pi i f(1) =$$

$$= 2\pi i.$$

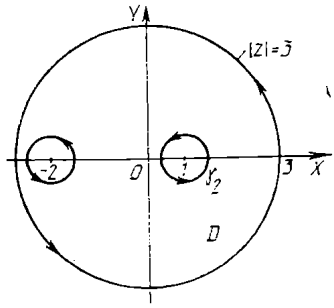


Рис. 15.23

Пример 6. Вычислить интеграл $I = \oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z\,dz}{z^2+z-2}$.

□ Подынтегральная функция $\frac{\cos z}{z^2+z-2} = \frac{\cos z}{(z+2)(z-1)}$ внутри окружности $|z| = 3$ имеет две особые точки: $z_1 = -2$ и $z_2 = 1$. Окружим их непересекающимися окружностями γ_1 и γ_2, лежащими внутри круга $|z| < 3$. В результате получим трехсвязную область D, изображенную на рис. 15.23. По теореме Коши для многосвязной области,

$$I = \oint_{|z|=3} \frac{\cos z\,dz}{(z+2)(z-1)} = \oint_{\gamma_1} \frac{\cos z\,dz}{(z+2)(z-1)} + \oint_{\gamma_2} \frac{\cos z\,dz}{(z+2)(z-1)}.$$

К интегралам в правой части этого равенства применим интегральную формулу Коши (15.65):

$$I = \oint_{\gamma_1} \frac{\cos z/(z-1)}{z+2}\,dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\cos z/(z+2)}{z-1}\,dz =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\cos z}{z-1}\Big|_{z=-2} + \frac{\cos z}{z+2}\Big|_{z=1}\right) = \frac{2}{3}\pi i(\cos 1 - \cos 2).$$

Бесконечная дифференцируемость аналитических функций. Пусть D — односвязная область с границей Γ и z — внутренняя точка D. Возьмем Δz таким, чтобы точка $z+\Delta z$ принадлежала области D. Если $f(z)$ — аналитическая в D функция, то, согласно формуле (15.65),

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(s)}{s-z}\,ds; \quad f(z+\Delta z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(s)\,ds}{s-(z+\Delta z)}.$$

Отсюда

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(s)\left(\frac{1}{s-z-\Delta z} - \frac{1}{s-z}\right)ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(s)}{(s-z)(s-z-\Delta z)}\,ds. \qquad (15.68)$$

Покажем, что

$$\lim_{\Delta z\to 0}\oint_\Gamma \frac{f(s)}{(s-z)(s-z-\Delta z)}\,ds = \oint_\Gamma \frac{f(s)}{(s-z)^2}\,ds. \qquad (15.69)$$

Для этого рассмотрим разность

$$\oint_\Gamma \frac{f(s)\,ds}{(s-z)(s-z-\Delta z)} - \oint_\Gamma \frac{f(s)\,ds}{(s-z)^2} = \Delta z \oint_\Gamma \frac{f(s)\,ds}{(s-z)^2(s-z-\Delta z)}. \quad (15.70)$$

Пусть $M = \max\limits_{s\in\Gamma} |f(s)|$, а $\delta = \min\limits_{s\in\Gamma} |z-s|$. Если L — длина контура Γ, то при $|\Delta z| < \delta$, согласно формуле (15.56),

$$\left| \oint_\Gamma \frac{f(s)\,ds}{(s-z)^2(s-z-\Delta z)} \right| \leqslant \frac{ML}{\delta^2(\delta - |\Delta z|)}.$$

Отсюда следует, что правая часть равенства (15.70) стремится к нулю при $\Delta z \to 0$. Следовательно, равенство (15.69) имеет место. Учитывая его, из соотношения (15.68) находим

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(s)}{(s-z)^2}\,ds. \quad (15.71)$$

Это *формула Коши* для $f'(z)$.

Повторяя приведенные выше рассуждения и исходя из формулы (15.71), получаем

$$f''(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f'(z+\Delta z) - f'(z)}{\Delta z} = \frac{2\cdot 1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(s)}{(s-z)^3}\,ds.$$

Этот процесс дифференцирования можно повторить неограниченное число раз и получить формулу для n-й производной функции $f(z)$:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\,ds, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad (15.72)$$

где $f^{(0)}(z) = f(z)$.

Формулу (15.72) можно получить из интегральной формулы Коши (15.65) последовательным дифференцированием интеграла по параметру z.

Пример 7. Вычислить интеграл $I = \oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin z\,dz}{(z-i)^3}$.

□ Используем интегральную формулу Коши (15.72) для производных аналитической функции при $n = 2$. Получим

$$I = \oint_{|z-i|=1} \frac{\sin z\,dz}{(z-i)^{2+1}} = \frac{2\pi i}{2!} (\sin z)''_{z=i} = -\pi i \sin i = \pi \operatorname{sh} 1.$$

Равномерная сходимость последовательности аналитических функций. Пусть $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, — аналитические функции в области D с границей Γ. Последовательность функций $(f_n(z))$ называется *равномерно сходящейся* на D к функции $f(z)$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall n \geqslant N, \quad \forall z \in D.$$

Как и в действительном анализе, легко доказать следующие свойства.

1°. Равномерно сходящаяся последовательность комплекснозначных функций, непрерывных в D, сходится к непрерывной функции в D.

2°. Равномерно сходящуюся последовательность аналитических функций можно интегрировать почленно вдоль любой кривой l, расположенной в D, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_l f_n(z)\,dz=\int_l \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,dz.$$

3°. Если последовательность аналитических функций $(f_n(z))$ сходится в области D к $f(z)$, а последовательность производных $(f_n'(z))$ сходится равномерно в D, то последовательность $(f_n(z))$ можно почленно дифференцировать:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(z)\right)'=\lim_{n\to\infty} f_n'(z).$$

Имеет место

Теорема 15.8 (Вейерштрасса). Пусть последовательность аналитических функций $(f_n(z))$ равномерно сходится в односвязной области D к функции $f(z)$. Тогда $f(z)$ — аналитическая в области D функция.

□ Вследствие равномерной сходимости последовательности аналитических функций $(f_n(z))$ предельная функция $f(z)$ непрерывна. Пусть Γ — произвольный замкнутый контур, расположенный в D. Тогда, согласно теореме Коши, $\oint_\Gamma f_n(z)\,dz=0$, $n=1, 2, \ldots$ В таком случае

$$\lim_{n\to\infty}\oint_\Gamma f_n(z)\,dz=0=\oint_\Gamma f(z)\,dz.$$

Итак, функция $f(z)$ непрерывна и интеграл от нее по любому замкнутому контуру равен нулю. По теореме Мореры 15.7 функция $f(z)$ аналитична в D. ■

15.4. РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Функциональные ряды в комплексной области. Пусть $(f_n(z))$ — последовательность функций комплексной переменной z. Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots \qquad (15.73)$$

Пусть $S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)$ — его n-я частичная сумма, $n=1, 2, \ldots$ Ряд (15.73) называется сходящимся к сумме $f(z)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z)=f(z)$. Другими словами, сходимость ряда

(15.73) к $f(z)$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N = N(\varepsilon, z)$, что при всех $n \geqslant N$

$$|S_n(z) - f(z)| < \varepsilon. \tag{15.74}$$

Множество D точек z, в которых функциональный ряд сходится, называется *областью сходимости* этого ряда.

Если ряд (15.73) сходится к сумме $f(z)$, то

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + f_{n+1}(z) + \ldots =$$

$$= S_n(z) + r_n(z),$$

где

$$r_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots = f(z) - S_n(z) \tag{15.75}$$

называется *остатком ряда* (15.73).

Из неравенства (15.74) следует, что ряд (15.73) сходится в точке z тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(z) = 0$.

Ряд (15.73) называется *равномерно сходящимся* в области D к сумме $f(z)$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant N$

$$|f(z) - S_n(z)| = |r_n(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in D. \tag{15.76}$$

Справедлива

Теорема 15.9 (признак Вейерштрасса). Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ удовлетворяют неравенствам $|f_n(z)| \leqslant a_n$, $\forall z \in D$, $n = 1, 2, \ldots$, где $a_n \geqslant 0$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно в D.

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство аналогичного признака для действительных функциональных рядов.

Комплексные равномерно сходящиеся функциональные ряды обладают следующими свойствами.

1°. Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ являются в области D аналитическими функциями и этот ряд сходится равномерно в D к сумме $f(z)$. Тогда $f(z)$ — аналитическая в D функция.

Это свойство следует из теоремы Вейерштрасса.

2°. Пусть члены равномерно сходящегося в области D ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ являются аналитическими функциями в D и этот ряд сходится к $f(z)$ в D равномерно. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ можно интегрировать почленно вдоль любой кривой l, расположенной в D, причем

$$\int_l \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_l f_n(z)\, dz.$$

3°. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ аналитических в D функций сходится в каждой точке области D, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ сходится в D равномерно. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ можно почленно дифференцировать в D, причем

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z).$$

Доказательства свойств 2° и 3° аналогичны доказательствам теорем 9.17 и 9.18 (гл. 9, ч. III) о почленном дифференцировании и интегрировании равномерно сходящихся действительных функциональных рядов.

При определении области сходимости комплексных функциональных рядов можно пользоваться признаками Коши или Д'Аламбера. Именно, если существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(z)|} = L(z) \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = L(z),$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится абсолютно при $L(z) < 1$ и расходится при $L(z) > 1$.

Как и для равномерно сходящихся последовательностей аналитических функций имеет место

Теорема 15.10 (Вейерштрасса). Пусть $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, — аналитические в замкнутой области D функции и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно в D к сумме $f(z)$. Тогда $f(z)$ аналитична в D.

Пример 1. Доказать сходимость и найти суммы рядов:

$$1 + \rho\cos\varphi + \rho^2\cos 2\varphi + \ldots + \rho^n\cos n\varphi + \ldots;$$
$$\rho\sin\varphi + \rho^2\sin 2\varphi + \ldots + \rho^n\sin n\varphi + \ldots$$

□ Так как $|\rho^n\cos n\varphi| \leqslant \rho^n$, $|\rho^n\sin n\varphi| \leqslant \rho^n$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho^n$, $0 < \rho < 1$, сходится, то по признаку Вейерштрасса данные ряды сходятся равномерно. Пусть A — сумма первого ряда, а B — сумма второго ряда. Умножив второй ряд на i и сложив почленно с первым рядом, получим

$$A + iB = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

где $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Так как $|z|<1$, то

$$A+iB=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-(x+iy)}=\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}.$$

Отсюда при $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ находим:

$$A=\frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}=\frac{1-\rho\cos\varphi}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cos n\varphi;$$

$$B=\frac{y}{(1-x)^2+y^2}=\frac{\rho\sin\varphi}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\sin n\varphi.$$

Степенные ряды в комплексной области. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots, \qquad (15.77)$$

где $c_n=a_n+ib_n$, a_n, $b_n\in\mathbf{R}$; $a=x_0+iy_0$; $z=x+iy$, называется *комплексным степенным рядом* или *рядом по степеням* $z-a$. При $a=0$ ряд (15.77) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots \qquad (15.78)$$

Пусть ряд (15.77) сходится в точке z_0. Тогда по теореме Абеля (см. гл. 9, ч. III) этот ряд сходится в круге $|z-a|<|z_0-a|$. Для каждого степенного ряда существует так называемый *круг сходимости* ряда с центром в точке $z=a$ радиусом $R\geqslant 0$. Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда, если этот ряд сходится при $|z-a|<R$ и расходится при $|z-a|>R$. Если $R=0$, степенной ряд сходится в единственной точке $z=a$.

В соответствии с признаком Д'Аламбера или Коши радиус сходимости степенного ряда (15.77) определяется формулой

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \qquad (15.79)$$

или

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}, \qquad (15.80)$$

если эти пределы существуют.

Так же, как и в действительном анализе, доказывается

Теорема 15.11. Пусть $R>0$ — радиус сходимости степенного ряда (15.77). Тогда этот ряд можно почленно дифференцировать в круге $|z-a|<R$ любое число раз. Получаемые при дифференцировании ряды имеют тот же радиус сходимости, что и исходный ряд (15.77).

Пусть $R>0$ — радиус сходимости степенного ряда (15.77). Тогда этот ряд можно почленно интегрировать вдоль любой гладкой кривой, расположенной в круге $|z-a|<R$.

Пример 2. Найти радиус сходимости и вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(z^n/n).$$

□ Имеем $c_n=(-1)^{n-1}/n$. По формуле (15.80) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, т. е. ряд сходится в круге $|z|<1$. Обозначим $S(z)$ сумму этого ряда:

$$S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(z^n/n). \tag{15.81}$$

Продифференцировав равенство (15.81) почленно, получим

$$S'(z)=1-z+z^2-\ldots+(-1)^{n-1}z^{n-1}+\ldots=\frac{1}{1+z},$$

откуда

$$S(z)=\int\frac{dz}{1+z}=\operatorname{Ln}(1+z)+C. \tag{15.82}$$

Из равенства (15.81) следует, что $S(0)=0$, т. е. $C=0$. Тогда, взяв главную ветвь логарифма, из соотношения (15.82) получим

$$S(z)=\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\ldots, \tag{15.83}$$

где $|z|<1$.

Пример 3. Найти радиус сходимости и вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^n$.

□ Имеем $c_n=n$. По формуле (15.79) $R=1$, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^n$ сходится в круге $|z|<1$ к некоторой сумме $S(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^n$. Отсюда получаем соотношение $\dfrac{S(z)}{z}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$ при $z\neq 0$. Проинтегрировав его почленно, будем иметь

$$\int_0^z\frac{S(t)}{t}\,dt=\int_0^z\left(\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^z nt^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}z^n=\frac{z}{1-z}.$$

Отсюда дифференцированием находим

$$\left(\frac{S(z)}{z}=\frac{1}{(1-z)^2}\right)\Rightarrow\left(S(z)=\frac{z}{(1-z)^2}\right).$$

Ряд Тейлора. Аналитическую функцию в каждой внутренней точке области аналитичности можно разложить в степенной ряд, подобный ряду Тейлора для действительных функций.

Теорема 15.12. Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой односвязной области D с границей Γ и a — внутренняя точка области D. Тогда справедливо разложение

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots+$$

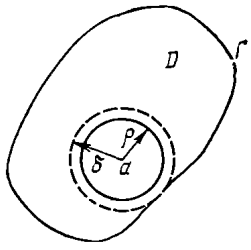


Рис. 15.24

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ldots, \qquad (15.84)$$

причем ряд (15.84) сходится в круге $|z-a|<\delta$, где δ — расстояние от точки a до контура Γ (рис. 15.24).

□ Пусть γ — окружность с центром в a и радиусом $\rho<\delta$. Согласно интегральной формуле Коши,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(s)}{s-z}\,ds. \qquad (15.85)$$

Так как s принадлежит окружности γ, то $|s-a|=\rho$. Отсюда при $|z-a|<\rho=|s-a|$ имеем $\left|\frac{z-a}{s-a}\right|<1$. Тогда

$$\frac{1}{s-z}=\frac{1}{(s-a)-(z-a)}=\frac{1}{(s-a)\,(1-(z-a)/(s-a))}=$$

$$=\frac{1}{s-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{s-a}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(s-a)^{n+1}}$$

(здесь использована формула суммы бесконечной геометрической прогрессии, у которой $|q|=\left|\frac{z-a}{s-a}\right|<1$.) Согласно признаку Вейерштрасса, полученный ряд в правой части последнего равенства сходится равномерно. Подставив $1/(s-z)$ в формулу (15.85) и проинтегрировав почленно, будем иметь

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n f(s)}{(s-a)^{n+1}}\,ds=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(s)\,ds}{(s-a)^{n+1}}\right)(z-a)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(s)\,ds}{(s-a)^{n+1}}\right)(z-a)^n.$$

Отсюда с учетом формул (15.72) получаем

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n. \ ■$$

Ряд (15.84) называется *рядом Тейлора* функции $f(z)$ в окрестности точки $z=a$. При $a=0$ он превращается в *ряд Маклорена*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n. \qquad (15.86)$$

Итак, всякая функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z-a|<\delta$, разлагается в сходящийся в этом круге степенной ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n. \tag{15.87}$$

Коэффициенты c_n ряда определяются формулами

$$c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(s)\,ds}{(s-a)^{n+1}}, \tag{15.88}$$

где γ — окружность $|z-a|=\rho<\delta$; δ — расстояние от центра разложения $z=a$ до ближайшей особой точки функции $f(z)$ в области D.

Пример 4. Разложить в ряд Тейлора по степеням z основные элементарные функции комплексной переменной, ряды которых, согласно теореме 15.12, сходятся на всей комплексной плоскости.

1. $f(z)=e^z$. Так как $f^{(n)}(z)=e^z$, $\forall n\in\mathbf{N}$, то $f^{(n)}(0)=1$. По формуле (15.86)

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots \tag{15.89}$$

2. $f(z)=\sin z$. Для этой функции $f^{(n)}(z)=\sin(z+n\pi/2)$ и, значит,

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k;\\ (-1)^k, & n=2k+1;\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\end{cases}$$

Следовательно, по формуле (15.86)

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ldots \tag{15.90}$$

3. $f(z)=\cos z$. Для этой функции $f^{(n)}(z)=\cos(z+n\pi/2)$, $f^{(n)}(0)=\cos(n\pi/2)$. Тогда

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}+\ldots \tag{15.91}$$

4. Аналогично для функций $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ получаем:

$$\operatorname{sh} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};\quad \operatorname{ch} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}. \tag{15.92}$$

Пример 5. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$ функции $1/(1-z)$ и $1/(1+z)$.

□ Точки $z=1$ и $z=-1$ являются особыми для функций $1/(1-z)$ и $1/(1+z)$ соответственно. В круге $|z|<1$ эти функции аналитические. Считая функции $1/(1-z)$ и $1/(1+z)$ суммами бесконечных геометрических прогрессий со знаменателем z и $-z$ соответственно, при $|z|<1$ получаем:

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\ |z|<1; \tag{15.93}$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\ldots+(-1)^n z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ |z|<1. \tag{15.94}$$

Пример 6. Разложить в ряд Тейлора по степеням z функцию $f(z) = \frac{1}{1+z^2} + e^{-2z}$.

□ Согласно равенствам (15.94) и (15.89), имеем:

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1;$$

$$e^{-2z} = 1 - 2z + \frac{2^2}{2!} z^2 - \frac{2^3}{3!} z^3 + \ldots + (-1)^n \frac{2^n}{n!} z^n + \ldots, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Просуммировав равенства, получим

$$\frac{1}{1+z^2} + e^{-2z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(z^{2n} + \frac{2^n}{n!} z^n \right).$$

Этот ряд сходится в круге $|z| < 1$.

Пример 7. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функцию $f(z) = (1 - z^2) \sin z$.

□ Согласно формуле (15.90),

$$(1 - z^2) \sin z = (1 - z^2) \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \right).$$

Перемножив почленно выражения в скобках, получим

$$(1 - z^2) \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots -$$

$$- z^3 + \frac{z^5}{3!} - \frac{z^7}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n-1)!} + \ldots =$$

$$= z - \left(1 + \frac{1}{3!}\right) z^3 + \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\right) z^5 - \left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{7!}\right) z^7 + \ldots +$$

$$+ (-1)^n \left(\frac{1}{(2n-1)!} + \frac{1}{(2n+1)!} \right) z^{2n+1} + \ldots$$

Областью сходимости полученного ряда является вся комплексная плоскость $\overline{\mathbf{C}}$.

Неравенство Коши и теорема Лиувилля. Неравенство Коши дает оценку коэффициентов c_n разложения аналитической функции в ряд Тейлора.

Справедлива

Теорема 15.13. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < R$, а M_R — максимальное значение $|f(z)|$ на окружности $|z| = R$. Если $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ — ряд Тейлора функции $f(z)$, то имеет место *неравенство Коши*

$$|c_n| \leqslant \frac{M_R}{R^n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{15.95}$$

□ Пусть Γ — окружность $|z| = R$. Оценивая интеграл (15.86) по модулю, получаем

$$|c_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(s)\,ds}{s^{n+1}}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma}\left|\frac{f(s)}{s^{n+1}}\right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{M_R}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R = \frac{M_R}{R^n}. \blacksquare$$

Теорема 15.14 (Лиувилля). Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, ограниченная на всей комплексной плоскости. Тогда $f(z)$ — постоянная функция.

□ Так как $f(z)$ аналитична при любом z, то ряд Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)$ сходится к $f(z)$ при всех z. Если при этом $|f(z)| < M$, то, согласно неравенству Коши (15.95), $|c_n| < M/R^n$ для всех n и $R > 0$. Отсюда при $R \to \infty$ получим $c_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда из ряда Тейлора $f(z) = c_0 = \text{const}$. ■

Следствие (основная теорема алгебры). Всякий многочлен $P_n(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_{n-1} z + c_n$, $c_0 \neq 0$, $n \geqslant 1$, имеет по крайней мере один корень.

□ Предположим, что многочлен $P_n(z)$ не имеет корней. Тогда функция $1/P_n(z)$ аналитическая и стремится к нулю при $z \to \infty$, т. е. $1/P_n(z)$ ограничена на всей комплексной плоскости. По теореме Лиувилля, $1/P_n(z) = \text{const} = 0$, что невозможно. Это свидетельствует о том, что многочлен $P_n(z)$ имеет по крайней мере один корень. ■

Ряд Лорана*. Обобщением ряда Тейлора является ряд Лорана, в который разлагается аналитическая функция в некотором кольце.

Теорема 15.15. Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $\rho < |z - a| < R$, разлагается внутри его в сходящийся ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n. \qquad (15.96)$$

Коэффициенты этого ряда вычисляются по формулам:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(s)\,ds}{(s-a)^{n+1}};\quad c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(s)\,(s-a)^{n-1}\,ds, \qquad (15.97)$$

где γ — окружность $|z - a| = r$; $\rho < r < R$.

□ Пусть z — произвольная внутренняя точка кольца $\rho < |z - a| < R$. Построим концентрическое с ним кольцо $\rho_1 < |z - a| < R_1$ радиусами ρ_1 и R_1, $\rho < \rho_1 < R_1 < R$ (рис. 15.25), такое, что точка z расположена внутри него. Обозначим меньшую окружность внутреннего кольца l, а большую — L. Так как функ-

---

* П. Лоран (1813—1854) — французский математик.

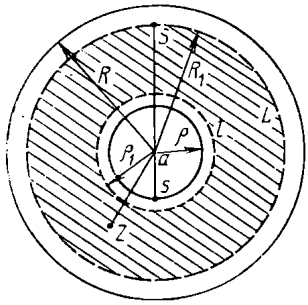


Рис. 15.25

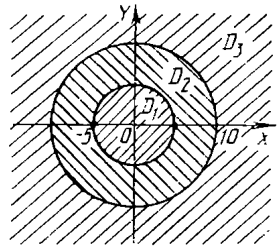


Рис. 15.26

ция $f(z)$ аналитична в замкнутом кольце $\rho_1 \leqslant |z-a| \leqslant R_1$, то, по теореме Коши для многосвязной области,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(s)\,ds}{s-z} - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_l \frac{f(s)\,ds}{s-z}. \tag{15.98}$$

Так как $|s-a| = R_1$ для $s \in L$ и $|s-a| = \rho_1$ для $s \in l$, то для любой точки z кольца $\rho_1 \leqslant |z-a| \leqslant R_1$ справедливы неравенства:

$$\begin{gathered}(|z-a| < |s-a| = R_1) \Rightarrow \left(\left|\frac{z-a}{s-a}\right| = q_1 < 1\right),\ s \in L; \\ (\rho_1 = |s-a| < |z-a|) \Rightarrow \left(\left|\frac{s-a}{z-a}\right| = q_2 < 1\right),\ s \in l.\end{gathered} \tag{15.99}$$

Учитывая это, имеем:

$$\begin{aligned}(s \in L) \Rightarrow \left(\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(s-a)-(z-a)} = \frac{1}{(s-a)\,(1-(z-a)/(s-a))} = \right. \\ \left. = \frac{1}{s-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{s-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(z-a)^n}{(s-a)^{n+1}}\right)\right);\end{aligned} \tag{15.100}$$

$$\begin{aligned}(s \in l) \Rightarrow \left(\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(s-a)-(z-a)} = -\frac{1}{(z-a)\,(1-(s-a)/(z-a))} = \right. \\ \left. = -\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{s-a}{z-a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(s-a)^n}{(z-a)^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(s-a)^{n-1}}{(z-a)^n}\right)\right).\end{aligned} \tag{15.101}$$

Как следует из первого соотношения (15.99), ряд (15.100) сходится равномерно в круге $|z-a| < R_1$. Аналогично из второго соотношения (15.99) следует, что ряд (15.101) сходится равномерно вне окружности $|z-a| > \rho_1$. Таким образом, оба ряда (15.100) и (15.101) сходятся в кольце $\rho_1 < |z-a| < R_1$. Подставив ряды (15.100) и (15.101) в равенство (15.98), будем иметь

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(s-a)^{n+1}}\,f(s)\,ds + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_l \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s-a)^{n-1}}{(z-a)^n}\,f(s)\,ds =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(s)\,ds}{(s-a)^{n+1}} \right) (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_l f(s)\,(s-a)^{n-1} ds \right) \times$$

$$\times \frac{1}{(z-a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n},$$

где $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(s)\,ds}{(s-a)^{n+1}}$; $c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_l f(s)\,(s-a)^{n-1} ds$. В этих формулах, согласно теореме Коши, для многосвязной области в качестве контура интегрирования можно взять окружность $|z-a| = r$, $\rho_1 < r < R_1$, т. е. справедлива формула (15.97).

Поскольку ρ_1 можно взять сколь угодно близким к ρ, а R_1 — к R, то ряд (15.96) сходится во всем кольце $\rho < |z-a| < R$. ■

Ряд (15.96) называется *рядом Лорана* функции $f(z)$ в окрестности точки $z = a$, при этом ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ называют *правильной* или *регулярной частью* ряда Лорана, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ — его *главной частью*. Правильная часть ряда Лорана есть степенной ряд, сходящийся в круге $|z-a| < R$, а главная часть представляет собой ряд, сходящийся при $|z-a| > \rho$, т. е. вне круга радиусом ρ с центром в точке a.

Приведем примеры разложения функций в ряд Лорана.

Пример 8. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в кольце $1 < |z| < 2$.

□ В рассматриваемом кольце $|z/2| < 1$ и $|1/z| < 1$. Тогда

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2(1-z/2)} - \frac{1}{z(1-1/z)} =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Пример 9. Найти все лорановские разложения функции $f(z) = \frac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}$ по степеням z.

□ Особыми точками функции служат корни знаменателя

$$50z^2 + 5z^3 - z^4 = -z^2 (z^2 - 5z - 50) = -z^2 (z-10)(z+5),$$

т. е. $z_0 = 0$, $z_1 = 10$ и $z_2 = -5$. Пусть D_1 — кольцо $0 < |z| < 5$, D_2 — кольцо $5 < |z| < 10$, D_3 — внешность круга $|z| = 10$ (рис. 15.26). Разложим функцию $f(z)$ на простейшие дроби:

$$\frac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4} = -\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{10} \frac{1}{z-10} + \frac{1}{5} \frac{1}{z+5}. \qquad (15.102)$$

В кольце D_1: $(0 < |z| < 5) \Rightarrow (|z/5| < 1$ и $|z/10| < 1)$, поэтому из равенства (15.102) получим

$$\frac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}=-\frac{1}{10z}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{10}\,\frac{1}{10\,(1-z/10)}+\frac{1}{5\cdot 5\,(1+z/5)}=$$

$$=-\frac{1}{10z}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{100}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{10}\right)^n+\frac{1}{25}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{5}\right)^n=$$

$$=\frac{2}{z^2}-\frac{1}{10z}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^{n+2}}+\frac{(-1)^n}{5^{n+2}}\right)z^n.$$

Итак, в кольце $0<|z|<5$ главная часть ряда Лорана состоит из двух слагаемых: $2/z^2$ и $-1/10z$.

В кольце D_2: $(5<|z|<10)\Rightarrow(|5/z|<1$ и $|z/10|<1)$. Тогда из равенства (15.102) получим

$$f(z)=-\frac{1}{10z}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{10}\,\frac{1}{10\,(1-z/10)}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{z\,(1+5/z)}=$$

$$=\frac{2}{z^2}-\frac{1}{10z}+\frac{1}{100}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{10}\right)^n+\frac{1}{5z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5}{z}\right)^n=$$

$$=\frac{2}{z^2}-\frac{1}{10z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{10^{n+2}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{n-1}}{z^{n+1}}. \qquad (15.103)$$

Заметим, что в кольце $5<|z|<10$ главная часть ряда Лорана (15.103) содержит бесчисленное множество слагаемых.

Если $z\in D_3$, то $|z|>10$, т. е. $|10/z|<1$, а значит, и $|5/z|<1$. Тогда

$$f(z)=\frac{2}{z^2}-\frac{1}{10z}-\frac{1}{10}\,\frac{1}{z\,(1-10/z)}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{z\,(1+5/z)}=$$

$$=\frac{2}{z^2}-\frac{1}{10z}-\frac{1}{10z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{10}{z}\right)^n+\frac{1}{5z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5}{z}\right)^n=$$

$$=\frac{2}{z^2}-\frac{1}{10z}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{10^{n-1}}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n5^{n-1}}{z^{n+1}}.$$

Итак, в D_3 лорановское разложение содержит только главную часть.

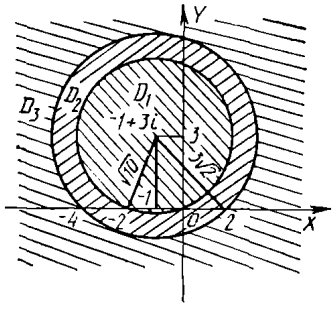


Рис. 15.27

Пример 10. Найти все лорановские разложения функции $f(z)=\dfrac{2z}{z^2-4}$ по степеням $z+1-3i$.

□ Особыми точками функции $2z/(z^2-4)$ являются $z_1=-2$ и $z_2=2$ (рис. 15.27). Центром разложения является точка $z_0=-1+3i$. Радиусы ρ и R колец разложения в ряд Лорана находятся как расстояния от z_0 до особых точек функции $f(z)$. Из рис. 15.27 имеем:

$$\rho=|z_1-z_0|=\sqrt{(-1+2)^2+3^2}=\sqrt{10};\quad R=$$
$$=|z_2-z_0|=\sqrt{(1+2)^2+3^2}=3\sqrt{2}.$$

Разложим функцию $f(z)$ на простейшие дроби: $f(z)=\dfrac{2z}{z^2-4}=\dfrac{1}{z+2}+$

$+\dfrac{1}{z-2}$.

В круге D_1: $|z+1-3i|<10$ имеем $|z+1-3i|/\sqrt{10}<1$. В этом круге функция $f(z)$ аналитическая. Представим ее в виде

$$\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+1-3i)+(1+3i)}+\frac{1}{(z+1-3i)-(3-3i)}=$$

$$=\frac{1}{1+3i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z+1-3i}{1+3i}}-\frac{1}{3-3i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z+1-3i}{3-3i}}.$$

Так как в круге D_1 выполняются неравенства $\left|\dfrac{z+1-3i}{1+3i}\right|=\dfrac{|z+1-3i|}{10}<1$ и $\left|\dfrac{z+1-3i}{3-3i}\right|=\dfrac{|z+1-3i|}{3\sqrt{2}}<1$, то, воспользовавшись формулой суммы геометрической прогрессии, получим

$$f(z)=\frac{1}{1+3i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z+1-3i}{1+3i}\right)^n-\frac{1}{3-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1-3i}{3-3i}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(1+3i)^{n+1}}-\frac{1}{(3-3i)^{n+1}}\right)(z+1-3i)^n.$$

В кольце D_2: $\sqrt{10}<|z+1-3i|<3\sqrt{2}$ имеем $|z+1-3i|/3\sqrt{2}<1$ и $\sqrt{10}/|z+1-3i|<1$. Тогда

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+1-3i)+(1+3i)}+\frac{1}{(z+1-3i)-(3-3i)}=$$

$$=\frac{1}{(z+1-3i)\left(1+\dfrac{1+3i}{z+1-3i)}\right)}-\frac{1}{(3-3i)\left(1-\dfrac{z+1-3i}{3-3i}\right)}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+3i)^n}{(z+1-3i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1-3i)^n}{(3-3i)^{n+1}}.$$

В области D_3: $|z+1-3i|>3\sqrt{2}$ имеем $\dfrac{3\sqrt{2}}{|z+1-3|}<1$ и $\dfrac{\sqrt{10}}{|z+1-3i|}<1$. Тогда

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+1-3i)+(1+3i)}+\frac{1}{(z+1-3i)-(3-3i)}=$$

$$=\frac{1}{(z+1-3i)\left(1+\dfrac{1+3i}{z+1-3i}\right)}+\frac{1}{(z+1-3i)\left(1-\dfrac{3-3i}{z+1-3i}\right)}=$$

$$= \frac{1}{z+1-3i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+3i)^n}{(z+1-3i)^n} + \frac{1}{z+1-3i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-3i)^n}{(z+1-3i)^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+3i)^n + (3-3i)^n}{(z+1-3i)^{n+1}}.$$

Пример 11. Разложить функцию $f(z) = z \sin \dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2}$ в окрестности точки $z = 1$ в ряд Лорана.

□ Представим функцию в виде

$$f(z) = (z-1+1) \sin\left(1 - \frac{1}{(z-1)^2}\right) = (z-1) \sin\left(1 - \frac{1}{(z-1)^2}\right) +$$

$$+ \sin\left(1 - \frac{1}{(z-1)^2}\right) = (z-1)\left(\sin 1 \cdot \cos \frac{1}{(z-1)^2} - \cos 1 \cdot \sin \frac{1}{(z-1)^2}\right) +$$

$$+ \sin 1 \cdot \cos \frac{1}{(z-1)^2} - \cos 1 \cdot \sin \frac{1}{(z-1)^2}. \qquad (15.104)$$

Используя разложения (15.90) и (15.91) для $\sin t$ и $\cos t$, при $t = 1/(z-1)^2$ будем иметь:

$$\cos \frac{1}{(z-1)^2} = 1 - \frac{1}{2!\,(z-1)^4} + \frac{1}{4!\,(z-1)^8} - \ldots;$$

$$\sin \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{3!\,(z-1)^6} + \frac{1}{5!\,(z-1)^{10}} + \ldots$$

Отсюда и из равенства (15.104) окончательно получаем

$$f(z) = \sin 1 \cdot \left((z-1) - \frac{1}{2!\,(z-1)^3} + \frac{1}{4!\,(z-1)^7} - \ldots\right) -$$

$$- \cos 1 \cdot \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!\,(z-1)^5} + \frac{1}{5!\,(z-1)^9} - \ldots\right) +$$

$$+ \sin 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2!\,(z-1)^4} + \frac{1}{4!\,(z-1)^8} - \ldots\right) -$$

$$- \cos 1 \cdot \left(\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{3!\,(z-1)^6} + \frac{1}{5!\,(z-1)^{10}} + \ldots\right).$$

Ряд Тейлора для аналитической в окрестности точки a функции $f(z)$ является частным случаем ряда Лорана, так как в этом случае коэффициенты $c_{-n} = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(s)(s-a)^{n-1} ds = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, согласно теореме Коши. Следовательно, ряд Лорана аналитической в окрестности точки a функции $f(z)$ состоит лишь из правильной его части, т. е. представляет собой ряд Тейлора.

Справедлива

Теорема 15.16. Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$, аналитической в кольце D: $\rho < |z-a| < R$, единственно.

□ Предположим, что функция $f(z)$ имеет два разложения: $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ и $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n'(z-a)^n$. Тогда

$$0\equiv\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n-\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n'(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(c_n-c_n')(z-a)^n,\ \forall z\in D.$$

Умножив это тождество на $(z-a)^{k-1}$, где k — любое целое число, и проинтегрировав по окружности γ: $|z-a|=r$, $\rho<r<R$, получим

$$\oint_\gamma\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(c_n-c_n')(z-a)^{n+k-1}dz=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(c_n-c_n')\oint_\gamma(z-a)^{n+k-1}dz\equiv 0.$$

Отсюда с учетом равенства (15.53) имеем

$$\left((c_{-k}-c_{-k}')\,2\pi i\equiv 0\right)\Rightarrow\left(c_{-k}\equiv c_{-k}'\right),\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$$

15.5. НУЛИ И ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Нули аналитических функций. Пусть $f(z)$ — аналитическая в области D функция. *Нулем* функции $f(z)$ называется комплексное число a, для которого $f(a)=0$.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности $U(a)$ точки a. Тогда для нее имеет место разложение

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n. \quad (15.105)$$

Если $z=a$ — нуль функции $f(z)$, то из равенства (15.105) следует, что в этом случае $c_0=0$.

Будем говорить, что точка $z=a$ является *нулем порядка k* функции $f(z)$, если коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ ряда (15.105) равны нулю, а $c_k\neq 0$. В этом случае равенство (15.105) имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty}c_n(z-a)^n=c_k(z-a)^k+c_{k+1}(z-a)^{k+1}+\ldots=$$

$$=(z-a)^k\left(c_k+c_{k+1}(z-a)+\ldots+c_{k+p}(z-a)^p+\ldots\right). \quad (15.106)$$

При $k=1$ нуль $z=a$ называется *простым*.

Обозначив $\varphi(z)=\sum\limits_{p=0}^{\infty}c_{k+p}(z-a)^p$, запишем соотношение (15.106) в виде

$$f(z)=(z-a)^k\varphi(z),\ \varphi(a)\neq 0, \quad (15.107)$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая в окрестности точки $z=a$ функция.

В частности, если $z=0$ — нуль порядка k функции $f(z)$, то

$$f(z)=z^k\varphi(z),\ \varphi(0)\neq 0. \quad (15.108)$$

Пример 1. Определить порядок нуля функции $f(z) = 1 - \cos z$.

□ Разложим $f(z)$ в ряд Тейлора:

$$1 - \cos z = 1 - 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \ldots = z^2\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \ldots\right).$$

Отсюда, согласно равенству (15.107), следует, что $z = 0$ является нулем второго порядка функции $1 - \cos z$.

Пример 2. Определить порядок нуля функции

$$f(z) = \frac{\cos z - 1 + z^2/2}{e^{3z} - 1}. \tag{15.109}$$

□ В точке $z = 0$ обращаются в нуль числитель и знаменатель функции (15.109). Разложим их в ряд Тейлора:

$$f(z) = \frac{(1 - z^2/2! + z^4/4! - z^6/6! + \ldots) - 1 + z^2/2}{(1 + 3z + 9z^2/2! + \ldots) - 1} =$$

$$= \frac{z^4/4! - z^6/6! + \ldots}{3z + 9z^2/2! + \ldots} = z^3\left(\frac{1/4! - z^2/6! + \ldots}{3 + 9z/2! + \ldots}\right).$$

Так как функция, стоящая в скобках, при $z = 0$ не равна нулю, то, согласно равенству (15.108), точка $z = 0$ является нулем третьего порядка функции (15.109).

Теорема 15.17. Для того чтобы точка $z = a$ была нулем порядка k функции $f(z)$, необходимо и достаточно выполнения соотношений:

$$f(a) = 0;\ f'(a) = 0;\ \ldots;\ f^{(k-1)}(a) = 0;\ f^{(k)}(a) \neq 0. \tag{15.110}$$

Доказательство теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 4.2, ч. II, о признаке кратности корня многочлена.

Пример 3. Определить порядок нуля $z = 0$ функции $f(z) = 2\sin z - z^2$.

□ Имеем $f(0) = 0$, $f'(0) = (2\cos z - 2z)|_{z=0} = 0$, $f''(0) = (-2\sin z - 2)|_{z=0} = -2 \neq 0$. Таким образом, $z = 0$ является нулем второго порядка для функции $2\sin z - z^2$.

Нули функции $f(z)$ называются *изолированными*, если их можно окружить непересекающимися окрестностями.

Теорема 15.18. Нули аналитической функции $f(z) \not\equiv 0$ изолированы.

□ Пусть $z = a$ — нуль функции $f(z)$ порядка k. Тогда $f(z) = (z - a)^k \varphi(z)$, $\varphi(a) \neq 0$. Так как функция $\varphi(z)$ непрерывна в точке a, то $\lim\limits_{z \to a} \varphi(z) = \varphi(a) \neq 0$. В таком случае существует ε-окрестность точки a, такая, что $\varphi(z) \neq 0$ для всех точек этой окрестности. Следовательно, в этой окрестности функция $f(z)$ других нулей, кроме $z = a$, не имеет. ■

Полюсы. Предположим, что функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z = a$, кроме самой этой точки. В этом случае точка a называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$. В окрестности этой точки функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - a)^{-n}. \tag{15.111}$$

Пусть все $c_{-n}=0$, $n>0$, т. е. отсутствует главная часть ряда Лорана. Тогда $\lim\limits_{z\to a} f(z)=c_0$. Но функция $f(z)$ в точке a не определена. В этом случае точка $z=a$ называется *устранимой особой точкой* функции $f(z)$. Чтобы устранить особенность функции $f(z)$ в точке $z=a$, достаточно положить $f(a)=\lim\limits_{z\to a} f(z)=c_0$.

Итак, если $z=a$ — устранимая особая точка функции $f(z)$, то существует $\lim\limits_{z\to a} f(z)=c_0$, т. е. *в окрестности устранимой особой точки функция* $f(z)$ *ограничена*.

Пусть в главной части ряда Лорана функции $f(z)$ имеется конечное число слагаемых, т. е. ряд Лорана имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n+\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}+\frac{c_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a},\quad c_{-k}\neq 0. \tag{15.112}$$

В этом случае точка $z=a$ называется *полюсом порядка* k функции $f(z)$. При $k=1$ полюс $z=a$ называется *простым*.

Умножив равенство (15.112) на $(z-a)^k$, получим

$$f(z)(z-a)^k=c_{-k}+c_{-k+1}(z-a)+\ldots+c_{-1}(z-a)^{k-1}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^{n+k}. \tag{15.113}$$

Обозначим правую часть этого равенства $\psi(z)$. Ясно, что функция $\psi(z)=\sum\limits_{n=-k}^{\infty} c_n(z-a)^{n+k}$ аналитическая в некоторой окрестности точки $z=a$, причем $\psi(a)=c_{-k}\neq 0$. Из равенства (15.113), учитывая обозначения, получаем:

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^k}\psi(z);\quad \psi(a)\neq 0. \tag{15.114}$$

Итак, функцию $f(z)$, имеющую в точке $z=a$ полюс порядка k, можно представить в виде (15.114). Отсюда следует, что если $z=a$ — полюс (любого порядка), то $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

Из равенства (15.114)

$$\frac{1}{f(z)}=\varphi(z)(z-a)^k;\quad \varphi(a)\neq 0;\quad \varphi(z)=\frac{1}{\psi(z)};\quad \psi(a)\neq 0.$$

Таким образом, если функция f в точке $z=a$ имеет полюс порядка k, то в этой точке функция $1/f$ имеет нуль порядка k. Справедливо и обратное: если функция g имеет в точке $z=a$ нуль порядка k, то функция $1/g$ в этой точке имеет полюс порядка k. Действительно, пусть $g(z)=\varphi(z)(z-a)^k$, $\varphi(a)\neq 0$. Отсюда, в силу аналитичности $1/\varphi(z)$,

$$\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{\varphi(z)(z-a)^k}=\frac{1}{(z-a)^k}(c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots)=$$

$$= \frac{c_0}{(z-a)^k} + \frac{c_1}{(z-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{c_{k-1}}{z-a} + c_k + c_{k+1}(z-a) + \ldots,$$

где $\dfrac{1}{\varphi(z)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$.

Из зависимости между полюсами и нулями аналитической функции и теоремы 15.18 следует, что полюсы аналитической функции являются изолированными особыми точками.

Точка $z = a$ называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$, если главная часть ряда Лорана этой функции в окрестности $z = a$ содержит бесконечное число слагаемых.

Пример 4. Определить тип особой точки $z = 0$ для функций:

а) $f_1(z) = \dfrac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z + z^3/6}$; б) $f_2(z) = z\cos(2/z^3)$; в) $f_3(z) = \dfrac{e^{3z} - 1}{\cos z - 1 + z^2/2}$.

□ а) Используя разложения в ряд Тейлора функций $\cos z^3$ и $\sin z$, имеем

$$f_1(z) = \frac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z + z^3/6} = \frac{(1 - z^6/2! + z^{12}/4! - \ldots) - 1}{(z - z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + \ldots) - z + z^3/6} =$$

$$= \frac{-z^6/2! + z^{12}/4! - \ldots}{z^5/5! - z^7/7! + \ldots} = \frac{z(-1/2 + z^6/4! - \ldots)}{(1/5! - z^2/7! + \ldots)}.$$

Так как функции в скобках при $z = 0$ в нуль не обращаются, то, согласно равенству (15.107), точка $z = 0$ является простым нулем функции $f_1(z)$.

б) Поступая аналогично, получаем

$$f_2(z) = z\cos\frac{2}{z^3} = z\left(1 - \frac{2^2}{2!z^6} + \frac{2^4}{4!z^{12}} - \frac{2^6}{6!z^{18}} + \ldots\right) =$$

$$= z - \frac{4}{2!z^5} + \frac{16}{4!z^{11}} - \frac{64}{6!z^{17}} + \ldots$$

Итак, главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых. Значит, $z = 0$ является существенно особой точкой функции $f_2(z)$.

в) Имеем

$$f_3(z) = \frac{e^{3z} - 1}{\cos z - 1 + z^2/2} = \frac{(1 + 3z + 9z^2/2 + 27z^3/6 + \ldots) - 1}{(1 - z^2/2! + z^4/4! - z^6/6! + \ldots) - 1 + z^2/2} =$$

$$= \frac{1}{z^3}\left(\frac{3 + 9z/2 + 27z^2/6 + \ldots}{1/4! - z^2/6! + \ldots}\right).$$

Отсюда, согласно равенству (15.114), следует, что $z = 0$ — полюс третьего порядка для функции $f_3(z)$.

Поведение функции в бесконечно удаленной точке. На комплексной плоскости существует лишь одна бесконечно удаленная точка $z = \infty$. Ее окрестностью является внешность круга с центром в начале координат произвольного, достаточно большого радиуса R. Если ввести подстановку $z = 1/w$ (или $w = 1/z$), окрестность точки $z = \infty$ плоскости $\mathbf{C}_z$ перейдет в окрестность точки $w = 0$ плоскости $\mathbf{C}_w$. Таким, образом, изучение поведения функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ сводится к изучению поведения функции $f(1/z)$ в окрестности точки $z = 0$.

Говорят, что функция $f(z)$ аналитична, имеет полюс порядка k, существенную особенность в бесконечно удаленной точке, если функция $f(1/z)$ обладает аналогичным свойством в точке $z=0$. Например, функция $\sin(1/z^3)$ имеет в бесконечно удаленной точке нуль третьего порядка, поскольку функция $\sin z^3 = z^3 - \frac{z^9}{3!} + \frac{z^{15}}{5!} - \ldots = z^3\left(1 - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^{12}}{5!} - \ldots\right)$ имеет в точке $z=0$ нуль третьего порядка.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z=\infty$. Тогда функция $f(1/z)$ аналитична в окрестности точки $z=0$. Разложим $f(1/z)$ в этой окрестности в ряд Лорана:

$$f(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}. \qquad (15.115)$$

Здесь $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ — правильная часть; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$ — главная часть этого разложения.

Заменив в разложении (15.115) z на $1/z$, c_n на a_{-n}, получим ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \qquad (15.116)$$

который называется разложением функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. При этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ называется *главной частью* ряда Лорана (15.116), а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$ — его *правильной частью*.

Таким образом, главная часть ряда Лорана (15.116) содержит положительные степени z, а правильная — нулевую и отрицательные степени z.

Если главная часть в ряде (15.116) отсутствует, т. е. $a_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, точка $z=\infty$ называется *устранимой особой точкой* функции $f(z)$. В этом случае $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = a_0$.

Точка $z=\infty$ называется *нулем кратности* k функции $f(z)$, если главная часть ее ряда Лорана отсутствует, а для правильной части выполнены условия:

$$a_0 = 0;\ a_{-1} = 0;\ \ldots;\ a_{-k+1} = 0;\ a_{-k} \neq 0. \qquad (15.117)$$

При выполнении условий (15.117) функция $f(z)$ в окрестности $=\infty$ представляется в виде

$$f(z)=\frac{1}{z^k}\left(a_{-k}+\frac{a_{-k-1}}{z}+\frac{a_{-k-2}}{z^2}+\ldots\right)=\frac{1}{z^k}\varphi(z), \quad (15.118)$$

где через $\varphi(z)$ обозначена сумма ряда в скобках, причем очевидно, что $\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z)=a_{-k}\neq 0$.

Точка $z=\infty$ называется *полюсом порядка* k функции $f(z)$, если ее разложение в ряд Лорана имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}+\sum_{n=1}^{k}a_n z^n, \quad a_k\neq 0, \quad (15.119)$$

т. е. главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ равна $a_1 z+a_2 z^2+\ldots+a_k z^k$, $a_k\neq 0$.

Если главная часть ряда Лорана содержит бесконечное множество слагаемых, то $z=\infty$ называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$.

Пример 8. Выяснить характер особой точки $z=\infty$ для функций:

а) $\dfrac{z}{4+z^4}$; б) $\sin z$; в) $z^3e^{1/z}$.

□ а) При $|z|>\sqrt{2}$ имеем $2/|z^2|<1$. Тогда

$$\frac{z}{4+z^4}=z\frac{1}{z^4(1+(2/z^2)^2)}=\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z^2}\right)^{2n}=\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{2^2}{z^4}+\frac{2^4}{z^8}-\ldots\right).$$

Отсюда, учитывая равенство (15.118), приходим к выводу, что $z=\infty$ является нулем третьего порядка функции $z/(4+z^4)$.

б) Из разложения $\sin z=z-z^3/3!+z^5/5!-\ldots$ следует, что главная часть ряда Лорана функции $\sin z$ в окрестности точки $z=\infty$ содержит бесконечное число слагаемых. Значит, $z=\infty$ является существенно особой точкой функции $\sin z$.

в) Поскольку

$$z^3e^{1/z}=z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\ldots\right)=$$

$$=z^3+z^2+\frac{z}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4z}+\ldots,$$

то, согласно равенству (15.118), функция $z^3e^{1/z}$ в точке $z=\infty$ имеет полюс третьего порядка.

15.6. ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. В окрестности изолированной особой точки $z=a$ аналитическая функция $f(z)$ представляется сходящимся рядом Лорана

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}. \quad (15.120)$$

Среди коэффициентов ряда (15.120) особо выделяется коэффициент c_{-1}. Он называется *вычетом* функции $f(z)$ в точке $z=a$ и обозначается $\operatorname{Res}\limits_{z=a} f(z)$ (от франц. *residu* — вычет). Итак, по определению,

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1}. \tag{15.121}$$

Согласно формуле (15.97), для коэффициентов ряда Лорана имеем

$$c_{-1} = \operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)\,dz, \tag{15.122}$$

где γ — замкнутый контур, ориентированный положительно и окружающий точку $z=a$. В качестве контура γ можно взять окружность с центром в точке a достаточно малым радиусом, не содержащую внутри других особых точек функции $f(z)$, кроме точки $z=a$.

Из формулы (15.122) получаем

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=a} f(z), \tag{15.123}$$

т. е. интеграл от функции $f(z)$ по границе достаточно малой окрестности точки $z=a$ равен вычету в этой точке, умноженному на $2\pi i$.

Пусть $z=a$ — устранимая особая точка функции $f(z)$. Тогда ряд Лорана $f(z)$ в окрестности $z=a$ имеет вид

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

Отсюда следует, что в *устранимой особой точке* $\operatorname{Res}\limits_{z=a} f(z) = c_{-1} = 0$.

Пример 1. Найти вычет функции $f(z)$ в точке $z=0$:

а) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^4}$; б) $f(z) = z^3 e^{1/z}$.

□ а) Используя разложение в ряд Тейлора функции $\cos z$, получаем

$$\frac{\cos z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\right) = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!} - \frac{z^2}{6!} + \ldots$$

Отсюда следует, что $z=0$ — полюс четвертого порядка для $\cos z/z^4$. Так как коэффициент при z^{-1} равен нулю, то $\operatorname{Res}\limits_{z=0}(\cos z/z^4) = 0$.

б) Аналогично предыдущему

$$z^3 e^{1/z} = z^3\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \frac{1}{5!z^5} = \right.$$

$$= z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \frac{1}{5!z^2} + \ldots$$

Отсюда коэффициент c_{-1} при z^{-1} равен $\dfrac{1}{4!} = \dfrac{1}{24}$, т. е. $\operatorname{Res}\limits_{z=0} z^3 e^{1/z} = \dfrac{1}{24}$.

Вычисление вычетов в полюсе. Предположим, что функция $f(z)$ имеет простой полюс (полюс первого порядка) в точке $z=a$. В этом случае функция $f(z)$ в окрестности точки a представляется равенством

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\frac{c_{-1}}{z-a}. \tag{15.124}$$

Умножив обе части равенства (15.124) на $z-a$, получим

$$(z-a)f(z)=(z-a)\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+c_{-1}. \tag{15.125}$$

Из соотношения (15.125), согласно определению вычета (15.121), получаем *формулу для вычисления вычета в простом полюсе*:

$$c_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=\lim_{z\to a}((z-a)f(z)). \tag{15.126}$$

Пусть, в частности, $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — аналитические в точке a функции, причем $\varphi(a)\neq 0$, $\psi(a)=0$, $\psi'(a)\neq 0$, т. е. $z=a$ — простой полюс функции $f(z)$. По формуле (15.126)

$$\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=\lim_{z\to a}\frac{(z-a)\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Итак, если $z=a$ — простой полюс функции $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$, то

$$\operatorname*{Res}_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{15.127}$$

б) Предположим теперь, что функция $f(z)$ имеет в точке $z=a$ *полюс порядка* k. Тогда ряд Лорана для $f(z)$ в окрестности точки a имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}. \tag{15.128}$$

Умножив обе части равенства (15.128) на $(z-a)^k$, получим

$$(z-a)^k f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^{n+k}+c_{-1}(z-a)^{k-1}+$$
$$+c_{-2}(z-a)^{k-2}+\ldots+c_{-k}.$$

Дифференцируя обе части этого равенства $k-1$ раз и переходя к пределу при $z\to a$, находим

$$(k-1)!\,c_{-1}=\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}((z-a)^k f(z)).$$

Отсюда получаем *формулу для вычисления вычета функции* $f(z)$ *в полюсе порядка* k:

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z-a)^k f(z)\right). \qquad (15.129)$$

Пример 2. Найти вычеты функции во всех изолированных особых точках:

а) $f(z) = \dfrac{1-z}{(z+i)(z-3)^3}$; б) $f(z) = \dfrac{z^3}{4+z^2}$.

□ а) Точка $z=-i$ является полюсом первого порядка функции $f(z)$. По формуле (15.126),

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{(z+i)(1-z)}{(z+i)(z-3)^3} = \lim_{z\to -i} \frac{1-z}{(z-3)^3} = \frac{-11+2i}{250}.$$

В точке $z=3$ эта функция имеет полюс третьего порядка. По формуле (15.129)

$$\operatorname*{Res}_{z=3} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 3} \left(\frac{(z-3)^3(1-z)}{(z+i)(z-3)^3}\right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z\to 3} \left(\frac{1-z}{z+i}\right)'' = \frac{11-2i}{125}.$$

б) Особыми точками функции $z^3/(4+z^2)$ являются $2i$ и $-2i$ — полюсы первого порядка. По формуле (15.117) находим:

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \frac{z^3}{(4+z^2)'}\bigg|_{z=2i} = \frac{z^3}{2z}\bigg|_{z=2i} = -2;$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z) = \frac{z^3}{2z}\bigg|_{z=-2i} = -2.$$

Замечание. Если $z=a$ — существенно особая точка функции $f(z)$, то для отыскания $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$ надо найти коэффициент c_{-1} разложения функции в ряд Лорана в окрестности точки $z=a$ (см. пример 1б).

Вычет в бесконечно удаленной точке. Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки $z=\infty$. Тогда ее ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n. \qquad (15.130)$$

Вычетом функции $f(z)$ *в бесконечно удаленной точке* называется коэффициент при $1/z$ разложения в ряд Лорана этой функции, взятый с обратным знаком. Таким образом, по определению,

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Заметим, что член c_{-1}/z принадлежит правильной части ряда Лорана (15.130).

По формуле (15.97)

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z)\,dz, \qquad (15.131)$$

где γ — окружность $|z|=R$ достаточно большого радиуса R, ориентированная положительно (против часовой стрелки), а γ^- — окружность, ориентированная отрицательно (по часовой стрелке.)

Предположим, что $z=\infty$ является нулем порядка k функции $f(z)$. Тогда ее ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, согласно соотношениям (15.117), имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{z^k}+\frac{c_{-k-1}}{z^{k+1}}+\frac{c_{-k-2}}{z^{k+2}}+\ldots$$

Отсюда следует, что если $z=\infty$ является нулем функции $f(z)$ порядка $k\geqslant 2$, то $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0$.

Пример 3. Найти вычет функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке:

а) $e^{\frac{1-z}{z}}$; б) $\frac{1}{z-3}\cos\frac{1}{z}$; в) $\frac{1}{z^4+4}\sin\frac{1}{z}$.

□ а) Имеем

$$e^{\frac{1-z}{z}}=e^{-1}e^{\frac{1}{z}}=e^{-1}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots\right)=e^{-1}+\frac{e^{-1}}{z}+\frac{e^{-1}}{2!z^2}+\ldots \tag{15.132}$$

Из разложения (15.132) следует, что функция $e^{\frac{1-z}{z}}$ аналитична в точке $z=\infty$. Тем не менее $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-e^{-1}\neq 0$.

б) Аналогично, разложив в ряд Лорана функцию $\cos(1/z)$, будем иметь

$$\frac{1}{z-3}\cos\frac{1}{z}=\frac{1}{z(1-3/z)}\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{z}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{z}+\frac{3}{z^2}-\frac{1}{2!z^3}-\ldots,$$

т. е. для данной функции точка $z=\infty$ — простой нуль. Отсюда $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-1$.

в) Имеем

$$\frac{1}{z^4+4}\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z^4(1+4/z^4)}\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z^4}\left(1-\frac{4}{z^4}+\ldots\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{z^5}-\frac{1}{8!z^7}-\frac{4}{z^9}+\ldots$$

Замечаем, что $z=\infty$ является нулем порядка $k=5>2$. Следовательно, $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0$.

Основная теорема о вычетах. Особые точки аналитических функций и вычеты в них играют важную роль в комплексном анализе. С помощью вычетов можно вычислять различные интегралы, не прибегая к предельному переходу или не находя первообразных. Определяющей в теории вычетов является

Теорема 15.19 (основная теорема о вычетах). Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, за исключением конеч-

ного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, и Γ — замкнутая положительно ориентированная кривая, расположенная в D и содержащая внутри себя точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (15.133)$$

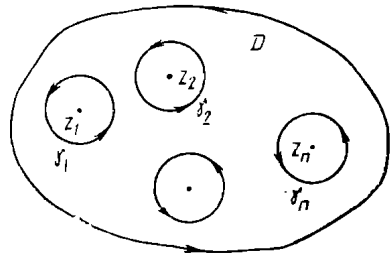


Рис. 15.28

□ Окружим каждую особую точку z_k окрестностью γ_k так, чтобы эти окрестности не пересекались (рис. 15.28). По теореме Коши для многосвязной области,

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)\,dz.$$

Отсюда и из формулы (15.123) получаем

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \blacksquare$$

Следствие. Пусть функция $f(z)$ аналитична на всей расширенной комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда сумма всех вычетов функции $f(z)$, включая и вычет в точке $z = \infty$, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0. \quad (15.134)$$

□ Пусть Γ — положительно ориентированная окружность $|z| = R$ радиусом R, выбранным таким образом, чтобы внутри круга $|z| < R$ лежали все точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда, согласно формуле (15.133),

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

С другой стороны, из формулы (15.131)

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z).$$

Сложив это равенство с предыдущим, получим соотношение (15.134). ■

Теорема 15.19 и следствие из нее позволяют вычислять интегралы по замкнутым кривым в том случае, когда подынтегральная функция в области, ограниченной этой кривой, имеет особые точки.

Пример 4. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z+3)}$.

□ Особыми точками подынтегральной функции являются полюсы первого

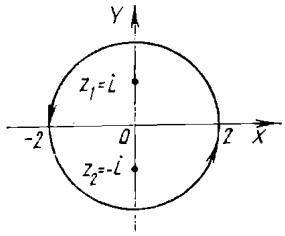


Рис. 15.29

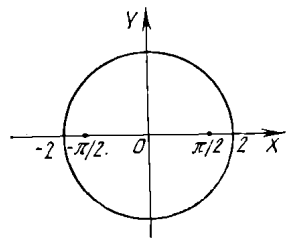


Рис. 15.30

порядка $z_1 = i$, $z_2 = -i$ и $z_3 = -3$. Внутри области, ограниченной окружностью $|z| = 2$, находятся точки $z_{1,2} = \pm i$ (рис. 15.29). Находим вычеты в этих точках. Имеем $f(z) = z^2/((z-i)(z+i)(z+3))$. Следовательно,

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)z^2}{(z-i)(z+i)(z+3)} = \frac{i^2}{2i(i+3)} = \frac{1+3i}{20};$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z=-i} \frac{(z+i)z^2}{(z-i)(z+i)(z+3)} = \frac{i^2}{-2i(-i+3)} = \frac{1-3i}{20}.$$

По формуле (15.133)

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z+3)} = 2\pi i\left(\frac{1+3i}{20} + \frac{1-3i}{20}\right) = \frac{\pi i}{5}.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z\cos z}\,dz$.

□ Особыми точками подынтегральной функции являются $z = 0$, $z = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. В круге $|z| = 2$ находятся точки $z = 0$ и $z = \pm\pi/2$ (рис. 15.30). Так как

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin^2 z}{z\cos z} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\cos z} = 0,$$

то $z = 0$ является устранимой особой точкой. В таком случае $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 0$.

Точки $z = \pm\pi/2$ — полюсы первого порядка подынтегральной функции. Для них по формуле (15.127)

$$\operatorname*{Res}_{z=\pm\pi/2} f(z) = \left.\frac{\sin^2 z}{(z\cos z)'}\right|_{z=\pm\pi/2} = \left.\frac{\sin^2 z}{\cos z - z\sin z}\right|_{z=\pm\pi/2} = -\frac{2}{\pi}.$$

Согласно равенству (15.133),

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z\cos z}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\right) = -8i.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint_{|z|=0,3} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 8iz}\,dz$.

□ Особой точкой подынтегральной функции в круге $|z| \leqslant 0{,}3$ является $= 0$. Воспользовавшись разложениями (15.89), (15.90) и (15.92), получим

$$\frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 8iz} = \frac{\left(1 + 4z + 8z^2 + \frac{64z^3}{3!} + \frac{4^4 z^4}{4!} + \ldots\right) - 1 - 4z + \frac{64z^3}{3!} - \frac{4^5 z^5}{5!}}{z^2\left(8iz + \frac{(8iz)^3}{3!} + \frac{(8iz)^5}{5!} + \ldots\right)} =$$

$$= \frac{8z^2 + \frac{128}{3!}z^3 + \ldots}{8iz^3\left(1 - \frac{(8z)^2}{3!} + \frac{(8z)^4}{5!} - \ldots\right)} = \frac{8 + \frac{128}{3!}z + \ldots}{8iz\left(1 - \frac{(8z)^2}{3!} + \frac{(8z)^4}{5!} - \ldots\right)}.$$

Замечаем, что $z = 0$ является полюсом первого порядка для подынтегральной функции. По формуле (15.126),

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z(8 + 128z/3! + \ldots)}{8iz(1 - 64z^2/3! + \ldots)} = \frac{1}{i} = -i.$$

Тогда

$$\oint\limits_{|z|=0,3} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 8iz}\, dz = 2\pi i(-i) = 2\pi.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-2|=2} \left(z \sin\frac{i}{z-2} - \frac{2\operatorname{sh}(\pi iz/2}{(z-1)^2(z+1)}\right) dz.$

□ Особыми точками подынтегральной функции являются $z = -1$, $z = 1$ и $z = 2$. Внутри окружности $|z-2| = 2$ находятся точки $z = 1$ и $z = 2$, причем $z = 1$ — полюс второго порядка. В окрестности точки $z = 2$ разложим слагаемое $z \sin\frac{i}{z-2}$ в ряд Лорана:

$$z \sin\frac{i}{z-2} = z\left(\frac{i}{z-2} - \frac{i^3}{3!(z-2)^3}\right) = ((z-2)+2)\left(\frac{i}{z-2} - \frac{i^3}{3!(z-2)^3} + \ldots\right) =$$

$$= i + \frac{2i}{z-2} - \frac{i^3}{3!(z-2)^2} + \ldots$$

Отсюда следует, что $z = 2$ — существенно особая точка слагаемого $z \sin\frac{i}{z-2}$ и $\operatorname*{Res}_{z=2} z \sin\frac{i}{z-2} = 2i$. Так как для слагаемого $-\frac{2\operatorname{sh}(\pi iz/2)}{(z-1)^2(z+1)}$ точка $z = 2$ является устранимой особой точкой, то $\operatorname*{Res}_{z=2}\left(-\frac{2\operatorname{sh}(\pi iz/2)}{(z-1)^2(z+1)}\right) = 0$. Таким образом, для подынтегральной функции $f(z)$ имеем $\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = 2i$.

Точно так же $\operatorname*{Res}_{z=1} z \sin(i/(z-2)) = 0$, а

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\left(-\frac{2\operatorname{sh}(\pi iz/2)}{(z-1)^2(z+1)}\right) = -\left(\frac{2\operatorname{sh}(\pi iz/2)}{z+1}\right)'\Big|_{z=1} = \frac{i}{2}.$$

В итоге $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = i/2$. Тогда в соответствии с основной теоремой о вычетах

$$\oint\limits_{|z-2|=2} \left(z \sin\frac{i}{z-2} - \frac{2\operatorname{sh}(\pi iz/2)}{(z-1)^2(z+1)}\right) dz = 2\pi i\left(2i + \frac{i}{2}\right) = -5\pi.$$

С помощью вычетов можно вычислять некоторые определенные интегралы.

Интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt$. Пусть $R(\sin t, \cos t)$ — дроб-

но-рациональная функция от $\sin t$ и $\cos t$. Введем замену $e^{it} = z$. Тогда:

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}; \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2};$$

$$(dz = ie^{it}dt = izdt) \Rightarrow \left(dt = \frac{dz}{iz}\right). \tag{15.135}$$

Так как $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, — уравнение окружности $|z| = 1$, то функция $z = e^{it}$ отображает отрезок $[0, 2\pi]$ на окружность $|z| = 1$, ориентированную положительно. Таким образом,

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz}. \tag{15.136}$$

Интеграл в правой части равенства (15.136) вычисляется с помощью основной теоремы о вычетах.

Пример 8. Вычислить интеграл $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5}\sin t + 3}$.

□ Согласно замене (15.135),

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{\sqrt{5}\,\frac{z + z^{-1}}{2i} + 3}\,\frac{dz}{iz} = 2\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{5}\,z^2 + 6iz - \sqrt{5}}.$$

Особыми точками подынтегральной функции $1/(\sqrt{5}\,z^2 + 6iz - \sqrt{5})$ являются $z_1 = -i/\sqrt{5}$ и $z_2 = -5i/\sqrt{5}$. Так как $|z_2| = \sqrt{5} > 1$, то в круге $|z| \leqslant 1$ имеется лишь одна особая точка $z_1 = -i/\sqrt{5}$ подынтегральной функции. В этой точке

$$\operatorname*{Res}_{z=-i/\sqrt{5}} f(z) = \lim_{z \to -i/\sqrt{5}} \frac{z + i\sqrt{5}}{\sqrt{5}\,(z + i/\sqrt{5})(z + 5i/\sqrt{5})} = -\frac{i}{4}. \tag{15.137}$$

По основной теореме о вычетах с учетом равенства (15.137) получаем

$$I = 2\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{5}\,z^2 + 6iz - \sqrt{5}} = 2 \cdot 2\pi i\left(-\frac{i}{4}\right) = \pi. \quad \triangleright$$

Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$. Здесь $R(x)$ — рациональная функция.

Теорема 15.20. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, и непрерывна вплоть до оси X. Предположим, что несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0, \quad (15.138)$$

где Γ_R — верхняя полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z > 0$.

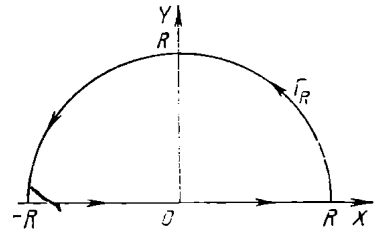


Рис. 15.31

В этом случае справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z), \quad (15.139)$$

где z_k — особые точки функции $f(x)$ в верхней полуплоскости.

□ Рассмотрим контур Γ (рис. 15.31), состоящий из отрезка $[-R, R]$ действительной оси X и полуокружности Γ_R: $|z| = R$, $\operatorname{Im} z > 0$, расположенной в верхней полуплоскости. Радиус R возьмем настолько большим, чтобы все особые точки функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, находились внутри области, ограниченной этим контуром. Тогда, согласно основной теореме о вычетах,

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (15.140)$$

Перейдем в равенстве (15.140) к пределу при $R\to\infty$. Так как интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то существует

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Согласно условию (15.138), интеграл $\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz$ стремится к нулю при $R\to\infty$. Отсюда и из равенства (15.14) получаем формулу (19.139). ■

Вернемся к интегралу $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$. Пусть $R(z) = P_n(z)/Q_m(z)$, где n и m — степени многочленов $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ соответственно. Сходимость интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$ означает, что $k = m - n \geqslant 2$ и функция $R(z)$ аналитична на действительной оси. Следовательно, условие

$$R(z) \sim \frac{C}{z^k}, \quad z\to\infty; \quad k\geqslant 2 \quad (C = \text{const}), \quad (15.141)$$

является достаточным условием сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$.

Условие (15.141) означает, что $|R(z)| \leqslant K/|z|^k$ при достаточно больших $|z|$. Тогда на основании оценки (15.56)

$$\left|\int_{\Gamma_R} R(z)\,dz\right| \leqslant \frac{K}{R^k}\pi R = \frac{\pi K}{R^{k-1}}, \quad k\geqslant 2 \quad (K = \text{const}).$$

Отсюда при $R\to\infty$ следует справедливость равенства (15.138).

Итак, если выполнено условие (15.141), имеет место равенство (15.138). Тогда по формуле (15.139),

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} R(z), \quad \operatorname{Im} z_k > 0. \tag{15.142}$$

Аналогично при условии (15.141) можно получить формулу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} R(z), \quad \operatorname{Im} z_k < 0. \tag{15.143}$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$.

□ Для функции $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2(z^2+16)}$ условие (15.141) выполнено. Следовательно, искомый интеграл можно вычислять по формуле (15.142). Особыми точками подынтегральной функции служат $z = \pm 4i$ (полюсы первого порядка) и $z = \pm i$ (полюсы второго порядка). В верхней полуплоскости расположены точки $z = 4i$ и $z = i$. Найдем вычеты подынтегральной функции в этих точках:

$$\operatorname*{Res}_{z=4i} f(z) = \lim_{z\to 4i} \frac{z-4i}{(z^2+1)^2(z-4i)(z+4i)} = \frac{1}{1800i};$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \left(\frac{(z-i)^2}{(z-i)^2(z+i)^2(z^2+16)}\right)' = \frac{13}{900i}.$$

По формуле (15.142)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)} = 2\pi i\left(\frac{1}{1800i} + \frac{13}{900i}\right) = \frac{3}{100}\pi.$$

Лемма Жордана*. Для вычисления интегралов вида

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos txdx; \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin txdx$$

используется

Теорема 15.21 (лемма Жордана). Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ всюду, за исключением конечного числа особых точек. Если $M_R = \max\limits_{z\in\Gamma_R} |f(z)| \to 0$ при $z\to\infty$, где Γ_R — верхняя полуокружность радиусом R с центром в начале координат, то при $t > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,e^{itz}dz = 0. \tag{15.144}$$

□ Заметим, что $\dfrac{2}{\pi}\theta \leqslant \sin\theta$ при $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 15.32). Рас-

* К. Жордан (1838—1921) — французский математик.

смотрим интеграл $\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, e^{itz}dz$, где Γ_R — полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ (см. рис. 15.31). Введем замену $z = Re^{i\theta}, dz = iRe^{i\theta}d\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Пусть $M_R = \max\limits_{z \in \Gamma_R} |f(z)|$. Поскольку $|e^{i\theta}| = 1$, $|e^{\alpha+i\beta}| = e^{\alpha}$, то

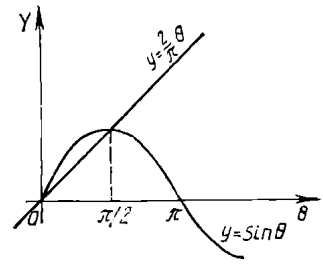


Рис. 15.32

$$\left|\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, e^{itz}dz\right| = \left|\int\limits_0^{\pi} f(Re^{i\theta})\, e^{itR(\cos\theta+i\sin\theta)} i \times\right.$$

$$\left. \times Re^{i\theta}d\theta\right| \leqslant$$

$$\leqslant M_R R \int\limits_0^{\pi} e^{-tR\sin\theta}d\theta = M_R R\left(\int\limits_0^{\pi/2} e^{-tR\sin\theta}d\theta + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} e^{-tR\sin\theta}d\theta\right). \quad (15.145)$$

Рассмотрим второй интеграл в правой части полученного равенства. Положим $\pi - \theta = \tau$. Тогда $d\theta = -d\tau$, $\sin\theta = \sin\tau$, $\tau \in [\pi/2, 0]$. Следовательно,

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} e^{-tR\sin\theta}d\theta = -\int\limits_{\pi/2}^{0} e^{-tR\sin\tau}d\tau = \int\limits_0^{\pi/2} e^{-tR\sin\theta}d\theta.$$

Оценка (15.145) принимает вид

$$\left|\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, e^{itz}dz\right| \leqslant 2M_R R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-tR\sin\theta}d\theta.$$

Так как $\sin\theta \geqslant 2\theta/\pi$, $\theta \in [0, \pi/2]$, то

$$\left|\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, e^{itz}dz\right| \leqslant 2M_R R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-tR\sin\theta}d\theta \leqslant$$

$$\leqslant 2M_R R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}Rt\theta}d\theta = -\frac{\pi M_R}{t} e^{-\frac{2}{\pi}Rt\theta}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi M_R}{t}(1 - e^{-Rt}). \quad (15.146)$$

Поскольку $M_R \to 0$ при $R \to \infty$, то из оценки (15.146) и следует равенство (15.144). ■

Аналогично доказываются следующие утверждения, являющиеся частными случаями леммы Жордана.

1. Если выполнены условия теоремы 15.21, то при $t < 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, e^{itz}dz = 0,$$

где Γ_R — нижняя полуокружность $|z| = R$; $\operatorname{Im} z \leqslant 0$.

2. Если выполнены условия теоремы 15.21, то при $t > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, e^{tz}dz = 0, \quad (15.147)$$

где Γ_R — левая (правая) полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ (при $t < 0$ $\operatorname{Re} z \geqslant 0$).

Вычисление интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{itx} dx$. Рассмотрим интеграл

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\, e^{itz} dz, \quad t > 0,$$

где γ — замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности Γ_R и отрезка $[-R, R]$ действительной оси (см. рис. 15.31). При этом радиус R возьмем настолько большим, чтобы все особые точки $z_1, z_2, \ldots z_n$ функции $f(z)$ находились внутри контура γ. Тогда, согласно основной теореме о вычетах,

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\, e^{itz} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} (f(z)\, e^{itz}), \quad \operatorname{Im} z_k > 0,$$

или

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, e^{itz} dz + \int\limits_{-R}^{+R} f(x)\, e^{itx} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} (f(z)\, e^{itz}), \quad \operatorname{Im} z_k > 0 \quad (15.148)$$

(на действительной оси $z = x$). Если $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана, то, согласно равенствам (15.144) и (15.148), при $R \to \infty$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{itx} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} (f(z)\, e^{itz}), \quad \operatorname{Im} z_k > 0. \quad (15.149)$$

Аналогично при $t < 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{itx} dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} (f(z)\, e^{itz}), \quad \operatorname{Im} z_k < 0. \quad (15.150)$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+16)(x^2+9)}$.

□ Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{(x^2+16)(x^2+9)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+16)(x^2+9)} + i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+16)(x^2+9)}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+16)(x^2+9)} = \operatorname{Re} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{(x^2+16)(x^2+9)}. \quad (15.151)$$

В нашем случае $t = 1 > 0$, а особыми точками функции $\frac{1}{(z^2+16)(z^2+9)}$ в верхней полуплоскости являются $z_1 = 4i$ и $z_2 = 3i$. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{z=4i} \frac{e^{iz}}{(z^2+16)(z^2+9)} = \lim_{z \to 4i} \frac{e^{iz}(z-4i)}{(z-4i)(z+4i)(z^2+9)} = -\frac{e^{-4}}{56i};$$

$$\operatorname*{Res}_{z=3i}\frac{e^{iz}}{(z^2+16)(z^2+9)}=\lim_{z\to 3i}\frac{e^{iz}(z-3i)}{(z^2+16)(z-3i)(z+3i)}=\frac{e^{-3}}{42i}.$$

По формуле (15.149), учитывая равенство (15.151), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+16)(x^2+9)}=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}\,dx}{(x^2+16)(x^2+9)}=$$

$$=\operatorname{Re}\left(2\pi i\left(\frac{e^{-4}}{-56i}+\frac{e^{-3}}{42i}\right)\right)=\frac{\pi}{7}\left(\frac{e^{-3}}{8}-\frac{e^{-4}}{4}\right).$$

Представим интеграл (15.148) в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{itx}dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)\,e^{itx}dx+\int_{0}^{+\infty}f(x)\,e^{itx}dx.$$

В первом интеграле справа заменим x на $-x$, тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{itx}dx=-\int_{+\infty}^{0}f(-x)\,e^{-itx}dx+\int_{0}^{+\infty}f(x)\,e^{itx}dx=$$

$$=\int_{0}^{\infty}(f(-x)\,e^{-itx}+f(x)\,e^{itx})\,dx,$$

и формула (15.149) примет вид

$$\int_{0}^{\infty}(f(-x)\,e^{-itx}+f(x)\,e^{itx})\,dx=$$

$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}(f(z)\,e^{itz}),\ \operatorname{Im}z>0. \qquad (15.152)$$

Пусть $f(x)$ — четная функция, т. е. $f(-x)=f(x)$. В этом случае равенство (15.152) можно привести к виду

$$\int_{0}^{\infty}f(x)\cos txdx=\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}(f(z)\,e^{itz}),\ \operatorname{Im}z_k>0, \qquad (15.153)$$

так как $e^{itx}+e^{-itx}=2\cos tx$.

Аналогично пусть $f(x)$ — нечетная функция, т. е. $f(-x)=-f(x)$. Тогда из равенства (15.152) получим

$$\int_{0}^{\infty}f(x)\sin txdx=\pi\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}(f(z)\,e^{itz}),\ \operatorname{Im}z_k>0, \qquad (15.154)$$

так как $e^{itx}-e^{-itx}=2i\sin tx$.

Итак, получены формулы для вычисления интегралов вида:

$$\int_{0}^{\infty}f(x)\cos txdx;\ \int_{0}^{\infty}f(x)\sin txdx.$$

Пример 11. Для интеграла $I=\int_{0}^{\infty}\frac{x^3\sin x\,dx}{(1+x^2)^2}$ $(t=1>0)$ по формуле

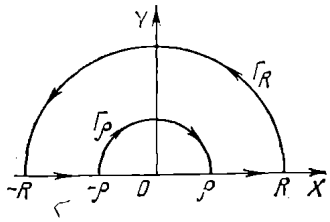


Рис. 15.33

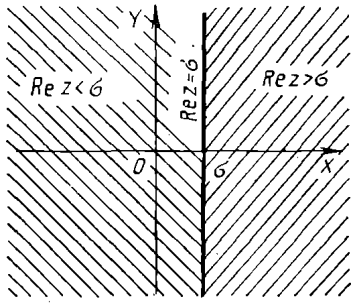


Рис. 15.34

(15.154) имеем ($z = i$ — единственная особая точка подынтегральной функции в верхней полуплоскости, являющаяся полюсом второго порядка)

$$I = \pi \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{z^3 e^{iz}}{(1+z^2)^2} = \frac{\pi}{4e}.$$

Пример 12. Вычислить интеграл Эйлера $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

□ Так как функция $f(z) = 1/z$ на действительной оси имеет полюс $z = 0$, формулу (15.154) применить нельзя. Функция $1/z$ удовлетворяет условиям леммы Жордана, поэтому $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$, где Γ_R — верхняя полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z > 0$. Изолируем точку $z = 0$ функции дугой верхней полуокружности Γ_ρ, имеющей малый радиус ρ, и рассмотрим интеграл $\int\limits_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz$, где $\gamma = \Gamma_R \cup \Gamma_\rho \cup [-R, -\rho] \cup [\rho, R]$ — контур, изображенный на рис. 15.33. Внутри контура γ функция e^{iz}/z аналитична. Поэтому по теореме Коши

$$0 = \oint\limits_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int\limits_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx. \quad (15.155)$$

Заменив во втором интеграле справа x на $-x$, получим

$$\int\limits_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = -\int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{-ix}}{x}\,dx.$$

Тогда

$$\int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx - \int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{-ix}}{x}\,dx = \int\limits_{\rho}^{R} \frac{2i\sin x}{x}\,dx.$$

Отсюда и из формулы (15.155)

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int\limits_{\rho}^{R} \frac{2i\sin x}{x}\,dx = 0$$

или

$$\int_{\rho}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{i}{2}\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \frac{i}{2}\int_{\Gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\,dz. \qquad (15.156)$$

При $R \to \infty$ первый интеграл справа, согласно лемме Жордана, стремится к нулю. Во втором интеграле функцию e^{iz}/z разложим в ряд:

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z}\left(1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \ldots\right) = \frac{1}{z} + i - \frac{z}{2!} - \frac{iz^2}{3!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{z} + h(z),$$

где $h(z)$ — функция, аналитическая в окрестности $U(0)$ точки $z = 0$, а значит, и ограниченная в ней. Следовательно, $|h(z)| \leqslant K$, $\forall z \in U(0)$, где K — некоторая постоянная. Тогда, согласно оценке (15.56),

$$\left|\int_{\Gamma_\rho} h(z)\,dz\right| \leqslant \int_{\Gamma_\rho} |h(z)|\,dz \leqslant K\int_{\Gamma_\rho} ds = K\pi\rho.$$

Отсюда получаем, что $\lim\limits_{\rho\to 0}\int\limits_{\Gamma_\rho} h(z)\,dz = 0$. В интеграле же $\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{dz}{z}$ сделаем замену $z = \rho e^{i\varphi}$ (φ изменяется от π до 0). Тогда

$$\int_{\Gamma_\rho}\frac{dz}{z} = \int_{\pi}^{0}\frac{\rho i e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}}\,d\varphi = -\pi i.$$

Таким образом,

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\Gamma_\rho}\frac{e^{iz}}{z}\,dz = \lim_{\rho\to 0}\int_{\Gamma_\rho}\left(\frac{1}{z} + h(z)\right)dz = -\pi i.$$

Окончательно из равенства (15.156) имеем

$$I = \int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \rho\to 0}}\int_{\rho}^{R}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{i}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}\,dz +$$

$$+\frac{i}{2}\lim_{\rho\to 0}\int_{\Gamma_\rho}\frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0 + \frac{i}{2}(-\pi i) = \frac{\pi}{2}.$$

Вычисление интегралов вида $\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(z)\,e^{tz}dz$. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(z)\,e^{tz}dz. \qquad (15.157)$$

Интегрирование ведется по прямой $\operatorname{Re} z = \sigma$, параллельной мнимой оси Y (рис. 15.34).

Аналогично изложенному выше можно получить следующие формулы:

при $t > 0$

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(z)\, e^{tz} dz = 2\pi i \sum_{k=1} \operatorname{Res}_{z=z_k} (f(z)\, e^{tz}),\ \operatorname{Re} z_k < \sigma, \quad (15.158)$$

при $t < 0$

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(z)\, e^{tz} dz = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} (f(z)\, e^{tz}),\ \operatorname{Re} z_k > \sigma. \quad (15.159)$$

Здесь z_k — особые точки функции $f(z)$, лежащие в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < \sigma$ при $t > 0$ (в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > \sigma$ при $t < 0$) (рис. 15.34).

Пример 13. Вычислить интеграл $I = \int_L \frac{e^{zt} dz}{(1+z)^2}$, $t > 0$, где L — прямая $\operatorname{Re} z = \sigma > -1$.

□ Единственной особой точкой подынтегральной функции, лежащей левее прямой L, является полюс второго порядка $z = -1$. Для нее $\operatorname{Res}_{z=-1} \frac{e^{zt}}{(1+z)^2} = te^{-t}$. По формуле (15.158) находим $I = 2te^{-t}\pi i$.

16. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

16.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Оригинал и изображение. Пусть $f = f(t)$ — функция действительного переменного t, определенная на полубесконечной прямой $0 < t < +\infty$. Предположим, что существует несобственный интеграл

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt, \tag{16.1}$$

зависящий от параметра $p = \sigma + i\omega$. Интеграл (16.1) называется *интегралом* или *преобразованием Лапласа* функции $f(t)$. При этом функция $F(p)$ называется *изображением функции* $f(t)$ *по Лапласу*, а $f(t)$ — *функцией-оригиналом* или просто *оригиналом*. *Операционное исчисление*, основоположником которого является О. Хевисайд*, рассматривает функции, связанные с интегральным преобразованием Лапласа (16.1).

Если $F(p)$ изображение по Лапласу оригинала $f(t)$, то

$$F(p) \doteqdot f(t) \text{ или } F(p) = \mathbf{L}\{f(t)\}.$$

Если $f(t)$ — оригинал для $F(p)$, то

$$f(t) \doteqdot F(p) \text{ или } f(t) = \mathbf{L}^{-1}\{F(p)\}.$$

В операционном исчислении рассматриваются функции-оригиналы $f(t)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $f(t)$ — кусочно-непрерывная, интегрируемая на любом конечном интервале оси t функция;

2) $f(t) \equiv 0$, $\forall t < 0$;

3) существуют постоянные $M > 0$ и σ, такие, что

$$|f(t)| \leqslant Me^{\sigma t}, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{16.2}$$

Точная нижняя грань σ_0 всех чисел σ, для которых справедливо неравенство (16.2), называется *показателем роста* функции $f(t)$.

Пример 1. Предполагая, что $f(t) \equiv 0$, $\forall t < 0$, указать, какие из функций являются оригиналами:

а) $f(t) = \sin t$; б) $f(t) = t/(t^2 - 4)$;
в) $f(t) = 1/t$; г) $f(t) = t^n$, $n = 0, 1, \ldots$

□ а) Так как $|\sin t| \leqslant 1 = e^{0 \cdot t}$, то функция $\sin t$ есть оригинал с показателем роста $\sigma_0 = 0$.

---

* О. Хевисайд (1850—1925) — английский физик.

б) Функция $t/(t^2-4)$ не является оригиналом, так как при $t=\pm 2$ она имеет разрыв второго рода.

в) Функция $1/t$ также не является оригиналом, так как $\lim\limits_{t\to+0} 1/t=+\infty$.

г) Так как $\lim\limits_{t\to+\infty} t^n/e^{\sigma t}=0$, $\forall\sigma>0$, то существует константа M, такая, что $t^n\leqslant Me^{\sigma t}$, $\forall t\geqslant 0$, т. е. t^n является оригиналом с показателем роста $\sigma_0>0$.

Справедлива

Теорема 16.1. Всякий оригинал $f(t)$ имеет изображение $F(p)$, являющееся аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p\geqslant\sigma>\sigma_0$, где σ_0 — показатель роста $f(t)$ (рис. 16.1).

□ Покажем, что интеграл Лапласа (16.1) сходится равномерно и абсолютно в области $\operatorname{Re} p\geqslant\sigma>\sigma_0$. Действительно, учитывая неравенство (16.2), имеем

$$|F(p)|=\left|\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}dt\right|\leqslant\int_0^\infty |f(t)|\,|e^{-(\sigma+i\omega)t}|\,dt=$$

$$=\int_0^\infty |f(t)|\,e^{-\sigma t}dt\leqslant M\int_0^\infty e^{-(\sigma-\sigma_0)t}dt=-\frac{M}{\sigma-\sigma_0}e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\Big|_0^\infty=\frac{M}{\sigma-\sigma_0},\tag{16.3}$$

если $\sigma>\sigma_0$. Отсюда, согласно признаку Вейерштрасса, и вытекает равномерная (и абсолютная) сходимость интеграла (16.1) по параметру p в области $\operatorname{Re} p\geqslant\sigma>\sigma_0$. Покажем, что в этой области функция $F(p)$ аналитическая. Продифференцировав формально интеграл Лапласа (16.1), получим $F'(p)=\int\limits_0^\infty -tf(t)\,e^{-pt}dt$. Докажем, что интеграл справа в этом равенстве сходится равномерно в области $\sigma>\sigma_0$. Действительно, согласно неравенству (16.2), при $\sigma>\sigma_0$

$$\left|\int_0^\infty -tf(t)\,e^{-pt}dt\right|\leqslant M\int_0^\infty te^{-(\sigma-\sigma_0)t}dt=$$

$$=-\frac{M}{\sigma-\sigma_0}\int_0^t tde^{-(\sigma-\sigma_0)t}=-\frac{M}{\sigma-\sigma_0}te^{-(\sigma-\sigma_0)t}\Big|_0^\infty+$$

$$+\frac{M}{\sigma-\sigma_0}\int_0^\infty e^{-(\sigma-\sigma_0)t}dt=-\frac{M}{(\sigma-\sigma_0)^2}e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\Big|_0^\infty=\frac{M}{(\sigma-\sigma_0)^2}.$$

Отсюда по признаку Вейерштрасса интеграл $\int\limits_0^\infty -tf(t)\,e^{-pt}dt$ сходится равномерно в области $\sigma>\sigma_0$. Тогда по теореме 7.10, ч. II, функция $F(p)$ дифференцируема, т. е. является аналитической в области $\operatorname{Re} p\geqslant\sigma>\sigma_0$. ■

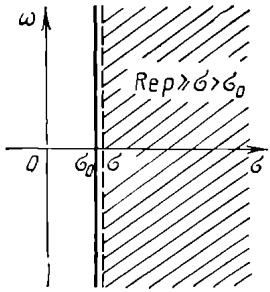


Рис. 16.1

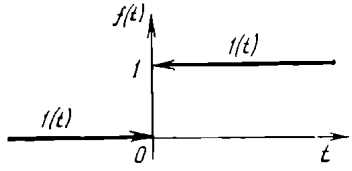


Рис. 16.2

Замечание. Аналитичность функции $F(p)$ следует и из теоремы Мореры 15.5. Действительно, в силу равномерной сходимости $F(p)$ в области $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma > \sigma_0$ вытекает ее непрерывность в этой области. Интегрируя $F(p)$ по любому замкнутому контуру l, целиком лежащему в области $\sigma > \sigma_0$, получаем

$$\oint_l F(p)\,dp = \oint_l \left(\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt \right) dp.$$

Изменив порядок интегрирования в интеграле справа (см. теорему 7.9, ч. II, об интегрируемости несобственного интеграла по параметру), получим

$$\oint_l F(p)\,dp = \int_0^\infty \left(\oint_l e^{-pt} dp \right) f(t)\,dt = 0,$$

так как по теореме Коши $\oint_l e^{-pt} dp = 0$ в силу аналитичности функции e^{-pt}.

Итак, для непрерывной функции $F(p)$ интеграл по любому замкнутому контуру l равен нулю. Тогда по следствию из теоремы Морера $F(p)$ — аналитическая функция в области $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma > \sigma_0$.

Следствие.

$$\lim_{\operatorname{Re} p \to \infty} F(p) = 0, \tag{16.4}$$

где p находится в области $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma > \sigma_0$.

Равенство (16.4) следует из оценки (16.3) интеграла Лапласа $F(p)$.

Из теоремы 16.1 следует, что не всякая функция $F(p)$ может служить изображением некоторого оригинала. Например, функция $\operatorname{ctg} p$ имеет бесконечное множество полюсов $p_k = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Поэтому нет такой области $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma > \sigma_0$, в которой $\operatorname{ctg} p$ является аналитической функцией. Функция $p/(p-1)$ также не является изображением, так как $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to \infty} p/(p-1) = 1$.

Пример 2. Найти изображение *единичной функции Хевисайда*

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 16.2.

□ Из равенства $|1(t)| = 1 = e^{0t}$ следует, что $1(t)$ — оригинал с показателем роста $\sigma_0 = 0$. По формуле (16.1)

$$\mathbf{L}\{1(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}dt = \frac{e^{-pt}}{-p}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

Итак,

$$1(t) \doteqdot 1/p, \tag{16.5}$$

где $\operatorname{Re} p > 0$.

С помощью единичной функции Хевисайда всякий оригинал $f(t)$ можно представить в виде

$$f(t)\cdot 1(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Например, функция $\sin t$ определена на всей действительной оси и не удовлетворяет условию «2» оригинала. Функция же

$$\sin t \cdot 1(t) = \begin{cases} \sin t, & t > 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

(рис. 16.3) уже есть оригинал, что доказано в примере «1 а». Ниже рассматриваются только оригиналы, поэтому для простоты их записи множитель $1(t)$ опускается.

Пример 3. Найти изображение оригиналов:

а) $f(t) = e^{\alpha t}$; б) $f(t) = t$.

□ а) $\mathbf{L}\{e^{\alpha t}\} = \int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)}\,dt = \frac{e^{-(p-\alpha)t}}{-(p-\alpha)}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p-\alpha}$, если $\operatorname{Re} p > \alpha$. Итак,

$$e^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{p-\alpha}; \tag{16.6}$$

б) $\mathbf{L}\{t\} = \int_0^\infty te^{-pt}dt = -\frac{te^{-pt}}{p}\Big|_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}dt = \frac{1}{p^2}$, $\operatorname{Re} p > 0$, так как $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-pt} = 0$. Итак,

$$t \doteqdot 1/p^2. \tag{16.7}$$

По индукции можно доказать, что

$$t^n \doteqdot n!/p^{n+1}, \tag{16.8}$$

Где $\operatorname{Re} p > 0$.

Перейдем к изложению основных свойств оригиналов и изображений.

Линейность преобразования Лапласа. Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — оригиналы с показателями роста σ_1 и σ_2 соответственно. Тогда очевидно, что линейная комбинация $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$, $\alpha_1\alpha_2 \in \mathbf{C}$ является

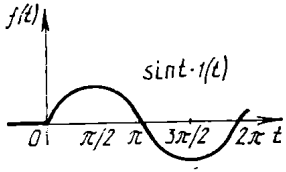


Рис. 16.3

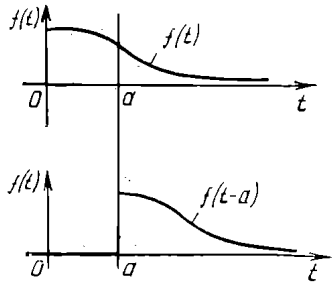


Рис. 16.4

оригиналом с показателем роста $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Отсюда, согласно линейности интеграла (16.1),

$$\mathbf{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 \mathbf{L}\{f_1(t)\} + \alpha_2 \mathbf{L}\{f_2(t)\}. \tag{16.9}$$

Пример 4. Найти изображение оригинала:
а) $\sin \beta t$, $\beta > 0$; б) $\cos \beta t$; в) $\operatorname{sh} \beta t$, $\beta > 0$; г) $\operatorname{ch} \beta t$.

□ а) Так как $\sin \beta t = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}\right)$ и $e^{\alpha t} \doteqdot \dfrac{1}{p-\alpha}$, то, согласно формуле (16.9),

$$\sin \beta t \doteqdot \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\beta} - \frac{1}{p + i\beta}\right) = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}.$$

Итак,

$$\sin \beta t \doteqdot \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}. \tag{16.10}$$

б) Аналогично из формулы $\cos \beta t = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}\right)$ получаем

$$\cos \beta t \doteqdot \frac{p}{p^2 + \beta^2}. \tag{16.11}$$

в) — г) Так как $\operatorname{sh} \beta t = \dfrac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2}$ и $\operatorname{ch} \beta t = \dfrac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2}$, то $\operatorname{sh} \beta t \doteqdot$

$$\doteqdot \frac{\beta}{p^2 - \beta^2}; \quad \operatorname{ch} \beta t \doteqdot \frac{p}{p^2 - \beta^2}. \tag{16.12}$$

Смещение в области изображения. ***Теорема 16.2*** (смещения). Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то для любого $\alpha \in \mathbf{C}$

$$e^{\alpha t} f(t) \doteqdot F(p - \alpha). \tag{16.13}$$

□ Имеем

$$\mathbf{L}\{f(t)\, e^{\alpha t}\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t)\, e^{-(p-\alpha)t} dt = F(p - \alpha). \blacksquare$$

Пример 5. Найти изображение оригинала:

а) $e^{\alpha t} \sin \beta t$; б) $e^{\alpha t} \cos \beta t$; в) $e^{\alpha t} t^n$.

□ По теореме смещения, согласно равенствам (16.10), (16.11) и (16.8), имеем:

а) $$e^{\alpha t} \sin \beta t \doteqdot \frac{\beta}{(p-\alpha)^2 + \beta^2}; \tag{16.14}$$

б) $e^{\alpha t}\cos\beta t \doteqdot \dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$;

в) $e^{\alpha t}t^n \doteqdot \dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$, $n=0,\ 1,\ \ldots$ (16.15)

Смещение в области оригинала. Пусть $f(t)$ — оригинал. Тогда $f(t-a)$, $a>0$, также является оригиналом с *аргументом*, запаздывающим на величину a. График $f(t-a)$ получается путем сдвига графика $f(t)$ вправо на величину a (рис. 16.4).

Справедлива

Теорема 16.3 (запаздывания). Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и $a>0$, то

$$f(t-a) \doteqdot e^{-pa}F(p). \tag{16.16}$$

□ Имеем

$$\mathbf{L}\{f(t-a)\} = \int_0^\infty f(t-a)\,e^{-pt}dt = \int_a^\infty f(t-a)\,e^{-pt}dt,$$

так как $f(t-a)\equiv 0$ при $t<a$. В последнем интеграле сделаем замену $t-a=\tau$, $dt=d\tau$. Тогда

$$\mathbf{L}\{f(t-a)\} = \int_0^\infty f(\tau)\,e^{-pa}e^{-p\tau}d\tau = e^{-pa}\int_0^\infty f(\tau)\,e^{-p\tau}d\tau = e^{-pa}F(p). \blacksquare$$

Аналогично доказывается формула ($a>0$)

$$f(t+a) \doteqdot e^{pa}\left(F(p) - \int_0^a f(t)\,e^{-pt}dt\right). \tag{16.17}$$

Пример 6. Найти изображение оригинала $\sin(t-\pi/2)$, $t>\pi/2$.

□ По формуле (16.16)

$$\mathbf{L}\{\sin(t-\pi/2)\} = e^{-\pi p/2}\mathbf{L}\{\sin t\} = e^{-\pi p/2}1/(p^2+1).$$

Заметим, что в рассматриваемом примере оригинал $\sin(t-\pi/2) = \sin(t-\pi/2)\,1(t-\pi/2)$. Если этого не учитывать, то, используя формулу $\sin(t-\pi/2) = -\cos t$, получим

$$\mathbf{L}\{\sin(t-\pi/2)\} = -\mathbf{L}\{\cos t\} = -p/(p^2+1),$$

что неверно, так как теперь уже оригиналом является $\cos t\cdot 1(t)$.

Теорема подобия. Справедлива

Теорема 16.4 (подобия). Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и $\lambda>0$, то

$$f(\lambda t) \doteqdot \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \tag{16.18}$$

□ Имеем

$$\mathbf{L}\{f(\lambda t)\} = \int_0^\infty f(\lambda t)\,e^{-pt}dt = \left|\begin{matrix}\lambda t=\tau\\ dt=\dfrac{1}{\lambda}d\tau\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(\tau)\,e^{-p\tau/\lambda}d\tau = \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \blacksquare$$

Пример 7. Зная, что $\operatorname{sh} t \doteqdot 1/(p^2-1)$, по формуле (16.18) получаем

$$\operatorname{sh} \beta t \doteqdot \frac{1}{\beta} \frac{1}{(p/\beta)^2-1} = \frac{\beta}{p^2-\beta^2},$$

что совпадает с равенством (16.12).

Изображение периодического оригинала. ***Теорема 16.5.*** Если $f(t)$ — оригинал периода $T>0$, то

$$f(t) \doteqdot \frac{\int_0^T f(t)\, e^{-pt} dt}{1-e^{-pT}}. \tag{16.19}$$

□ Так как $f(t)=f(t+T)$, то по формуле (16.17)

$$\mathbf{L}\{f(t+T)\} = \mathbf{L}\{f(t)\} = e^{pT}\left(\mathbf{L}\{f(t)\} - \int_0^T f(t)\, e^{-pt} dt\right).$$

Решая это уравнение относительно $\mathbf{L}\{f(t)\}$, получаем

$$\mathbf{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T f(t)\, e^{-pt} dt}{1-e^{-pT}},$$

что равносильно равенству (16.19). ■

Пример 8. Найти изображение оригинала $|\sin \beta t|$.

□ Функция $|\sin \beta t|$ является периодичной с периодом $T=\pi/\beta$. По формуле (16.19) для ее изображения получим

$$F(p) = \frac{\int_0^{\pi/2} |\sin \beta t|\, e^{-pt} dt}{1-e^{-p\pi/\beta}} = \frac{1+e^{-\pi p/\beta}}{1-e^{-\pi p/\beta}}.$$

Изображение свертки оригиналов. Сверткой двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция, определяемая равенством

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau.$$

Так как $f_1(\tau) \equiv 0$ при $\tau<0$ и $f_2(t-\tau) \equiv 0$ при $\tau>t$, то для свертки получаем следующее выражение:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau. \tag{16.20}$$

Напомним свойства свертки (их доказательства приведены в гл. 10, ч. III).

1°. $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ (коммутативность).

2°. $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$ (ассоциативность).

3°. $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) * f_3 = \alpha_1 (f_1 * f_3) + \alpha_2 (f_2 * f_3)$ (линейность).

Покажем, что свертка двух оригиналов есть оригинал. В самом деле, если $t<0$, то $t-\tau<0$ и, значит, $f_2(t-\tau) \equiv 0$. Отсюда и из равенства (16.20) следует, что $f_1(t) * f_2(t) \equiv 0$. Далее, свертка

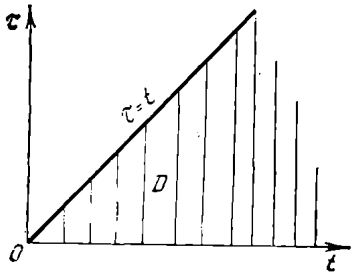


Рис. 16.5

как интеграл с переменным верхним пределом есть непрерывная функция при всех $t > 0$.

Пусть σ_1 и σ_2 — показатели роста оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, т. е. $|f_1(t)| \leqslant M_1 e^{\sigma_1 t}$; $|f_2(t)| \leqslant M_2 e^{\sigma_2 t}$, где M_1, $M_2 = \text{const}$. Отсюда и из равенства (16.20) следует

$$|f_1 * f_2| = \left| \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t |f(\tau)|\,|f_2(t-\tau)|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant M_1 M_2 \int_0^t e^{\sigma_1 \tau} e^{\sigma_2 (t-\tau)} d\tau = M_1 M_2 e^{\sigma_2 t} \int_0^t e^{(\sigma_1 - \sigma_2)\tau} dt =$$

$$= \begin{cases} M_1 M_2 e^{\sigma_2 t} t, & \sigma_1 = \sigma_2 \\ M_1 M_2 \dfrac{e^{\sigma_1 t} - e^{\sigma_2 t}}{\sigma_1 - \sigma_2}, & \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{cases} \leqslant \begin{cases} M_1 M_2 e^{(\sigma_2 + 1)t}, & \sigma_1 = \sigma_2; \\ M e^{\sigma t}, & \sigma_1 \neq \sigma_2, \end{cases}$$

где $M = \text{const}$; $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Здесь учтено, что $t < e^t$, $t > 0$.

Итак, действительно, свертка двух оригиналов есть оригинал.

Справедлива

Теорема 16.6 (Бореля)*. Если $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$, то

$$f_1(t) * f_2(t) \doteqdot F_1(p)\, F_2(p). \tag{16.21}$$

Равенство (16.21) называется *формулой умножения изображений.*

□ Имеем

$$\mathbf{L}\{f_1 * f_2\} = \int_0^\infty e^{-pt} \left(\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^t e^{-pt} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, dt d\tau = \iint_D f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, e^{-pt} d\tau dt,$$

где D — бесконечный сектор, изображенный на рис. 16.5.

Меняя порядок интегрирования в двойном интеграле, получаем

$$\mathbf{L}\{f_1 * f_2\} = \int_0^\infty f_1(\tau) \left(\int_\tau^\infty f_2(t-\tau)\, e^{-pt} dt \right) d\tau = |\, t - \tau = \theta,\ dt = d\theta\,| =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau) \left(\int_0^\infty f_2(\theta)\, e^{-p\tau - p\theta} d\theta \right) d\tau = \int_0^\infty f_1(\tau)\, e^{-p\tau} d\tau \int_0^\infty f_2(\theta)\, e^{-p\theta} d\theta =$$

$$= F_1(p)\, F_2(p). \blacksquare$$

---

* Э. Борель (1871—1956) — французский математик.

Пример 9. Найти оригинал $f(t)$ по его известному изображению $F(p) = p/(p^2+1)^2$.

□ Представим изображение в виде $F(p) = \frac{p}{p^2+1}\frac{1}{p^2+1}$. Так как $\frac{p}{p^2+1} \doteqdot \cos t$, $\frac{1}{p^2+1} \doteqdot \sin t$, то по формуле (16.21)

$$\frac{p}{p^2+1}\frac{1}{p^2+1} \doteqdot \cos t * \sin t = \int_0^t \cos\tau \sin(t-\tau)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^t (\sin t + \sin(t - 2\tau))\,d\tau = \frac{1}{2}\left(\tau \sin t + \frac{1}{2}\cos(t-2\tau)\right)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{t\sin t}{2} = f(t).$$

Дифференцирование и интегрирование оригинала. ***Теорема 16.7*** (изображение производной оригинала). Если $f(t)$ и $f'(t)$ — оригиналы и $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(+0), \tag{16.22}$$

где $f(+0) = \lim\limits_{t\to+0} f(t)$.

□ По определению изображения имеем

$$f'(t) \doteqdot \int_0^\infty f'(t)\,e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-pt}d(f(t)) = f(t)\,e^{-pt}\Big|_0^\infty +$$

$$+ p\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}dt = \lim_{t\to\infty} f(t)\,e^{-pt} - \lim_{t\to+0} f(t)\,e^{-pt} + pF(p). \tag{16.23}$$

Если σ_0 — показатель роста $f(t)$, то при $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma > \sigma_0$

$$|f(t)\,e^{-pt}| \leqslant Me^{\sigma_0 t}e^{-\sigma t} = Me^{-(\sigma-\sigma_0)t}.$$

Тогда при $\sigma > \sigma_0$ имеем $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)\,e^{-pt} = 0$. Так как $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\,e^{-pt} = f(+0)$, то отсюда и из равенства (16.23) следует формула (16.22). ■

В частности, если $f(+0) = 0$, то $f'(t) \doteqdot pF(p)$.

В дальнейшем под $f(0)$ будем понимать $f(+0)$.

Следствие. Если $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ — оригиналы и $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{16.24}$$

Равенство (16.24) доказывается по индукции. В частности, если $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) \doteqdot p^nF(p)$.

Пример 10. Найти изображение дифференциального выражения $f''(t) + 2f'(t) + f(t)$, если $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ и $f(t) \doteqdot F(p)$.

□ По формуле (16.24) имеем:

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0) = pF(p) - 1;$$

$$f''(t) \doteqdot p^2F(p) - pf(0) - f'(0) = p^2F(p) - p - 2.$$

Тогда

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t) \doteqdot (p^2 + 2p + 1)F(p) - p - 4.$$

Пример 11. Так как $\sin t \doteqdot \dfrac{1}{p^2+1}$ и $\cos t = (\sin t)'$, то $\cos t \doteqdot p\dfrac{1}{p^2+1} - \sin 0 = \dfrac{p}{p^2+1}$.

Пусть $f(t)$ — оригинал. Тогда функция $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$ как свертка $f(t) * 1(t)$ также является оригиналом.

Имеет место

Теорема 16.8 (изображение интеграла). Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}. \tag{16.25}$$

□ Преобразовав по Лапласу равенство $\left(\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right)' = f(t)$, с учетом формулы (16.22) изображения производной, получим

$$\mathbf{L}\left\{\left(\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right)'\right\} = p\mathbf{L}\left\{\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} - \int\limits_0^0 f(\tau)\,d\tau = F(p). \tag{16.26}$$

Из соотношения 16.26 и вытекает равенство $\mathbf{L}\left\{\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \dfrac{F(p)}{p}$, совпадающее с формулой (16.25). ■

Пример 12. Найти оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p-1)}$.

□ Так как $\dfrac{1}{p-1} \doteqdot e^t$, то $\dfrac{1}{p(p-1)} \doteqdot \int\limits_0^t e^\tau d\tau = e^t - 1$. Тогда

$$\frac{1}{p^2(p-1)} = \frac{1}{p(p(p-1))} \doteqdot \int\limits_0^t (e^\tau - 1)\,d\tau = e^t - t - 1 = f(t).$$

Дифференцирование и интегрирование изображений. ***Теорема 16.9*** (дифференцирование изображений). Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$tf(t) \doteqdot -F'(p). \tag{16.27}$$

□ Из интеграла Лапласа $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-pt}dt$, согласно его аналитичности, имеем $F'(p) = \int\limits_0^\infty -tf(t)\,e^{-pt}dt$. Отсюда следует равенство $F'(p) \doteqdot -tf(t)$, равносильное равенству (16.27). ■

Следствие. Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$t^n f(t) \doteqdot (-1)^n F^{(n)}(p). \tag{16.28}$$

Формула (16.28) доказывается по индукции.

Пример 13. Так как $\sin t \doteqdot \dfrac{1}{p^2+1}$, то

$$t^2 \sin t \doteqdot (-1)^2 \left(\frac{1}{p^2+1}\right)'' = \frac{6p^2-2}{(p^2+1)^3}.$$

Теорема 16.10 (интегрирование изображения). Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и интеграл $\int\limits_p^\infty F(s)\,ds$ сходится, то

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int\limits_p^\infty F(s)\,ds. \tag{16.29}$$

Так как $\dfrac{e^{-pt}}{t} = \int\limits_p^\infty e^{-st}ds$, где путь интегрирования лежит в области $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma > \sigma_0$ [σ_0 — показатель роста $f(t)$], то

$$\mathbf{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int\limits_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt}dt = \int\limits_0^\infty f(t)\left(\int\limits_p^\infty e^{-st}ds\right)dt =$$

$$= \int\limits_p^\infty \left(\int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-st}dt\right)ds = \int\limits_p^\infty F(s)\,ds,$$

что совпадает с равенством (16.29). ■

Пример 14. Найти изображение оригиналов:

а) $\dfrac{\sin \beta t}{t}$; б) $\int\limits_0^t \dfrac{\cos \tau - \cos 2\tau}{\tau}\,d\tau$.

□ а) Так как $\sin \beta t \doteqdot \dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$, то по формуле (16.29)

$$\frac{\sin \beta t}{t} \doteqdot \int\limits_p^\infty \frac{\beta}{s^2+\beta^2}\,ds = \beta \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{s}\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\beta}{p} = \operatorname{arcctg}\frac{\beta}{p}.$$

б) Имеем $\cos t - \cos 2t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+1} - \dfrac{p}{p^2+4}$. Тогда

$$\frac{\cos t - \cos 2t}{t} \doteqdot \int\limits_p^\infty \left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4}\right)ds = \frac{1}{2} \ln \frac{s^2+1}{s^2+4}\Big|_p^\infty = \frac{1}{2} \ln \frac{p^2+4}{p^2+1}.$$

Отсюда по формуле (16.25) окончательно получаем

$$\int\limits_0^t \frac{\cos \tau - \cos 2\tau}{\tau}\,d\tau \doteqdot \frac{1}{2p} \ln \frac{p^2+4}{p^2+1}.$$

Оригиналы, зависящие от параметра. Пусть $f(t, x)$ — оригинал по переменной t, зависящей от параметра x, а $F(p, x)$ — его изображение, т. е.

$$F(p, x) = \int_0^\infty f(t, x)\, e^{-pt} dt. \tag{16.30}$$

Если $f'_x(t, x)$ — оригинал, тогда интеграл $\int_0^\infty f'_x(t, x)\, e^{-pt} dt$ сходится равномерно в области $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma > \sigma_0$ [σ_0 — показатель роста $f(t, x)$]. В таком случае справедливо равенство

$$\frac{\partial F(p, x)}{\partial x} = \int_0^\infty \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\, e^{-pt} dt,$$

т. е.

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \doteqdot \frac{\partial F(p, x)}{\partial x}. \tag{16.31}$$

Аналогично, если $f''_{xx}(t, x)$ — оригинал, то

$$\frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} \doteqdot \frac{\partial^2 F(p, x)}{\partial x^2}. \tag{16.32}$$

Пример 15. Так как $\operatorname{sh} t \doteqdot \frac{1}{p^2 + 1}$, то, согласно формуле (16.16), $\operatorname{sh}(t - ax) \doteqdot \frac{e^{-axp}}{p^2 - 1}$. Отсюда дифференцированием по параметру x получаем

$$-a \operatorname{ch}(t - ax) \doteqdot \frac{-pae^{-pax}}{p^2 - 1},$$

т. е. $\operatorname{ch}(t - ax) \doteqdot \frac{pe^{-axp}}{p^2 - 1}$.

Несобственные интегралы от оригиналов и изображений. Следующее утверждение широко применяется при вычислении несобственных интегралов.

Теорема 16.11. Пусть $f(t)$ — оригинал и $F(p)$ — его изображение. Тогда

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\, dt = \int_0^\infty F(p)\, dp, \tag{16.33}$$

если оба интеграла сходятся.

□ Имеем

$$\int_0^\infty F(p)\, dp = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt \right) dp = \int_0^\infty f(t) \left(\int_0^\infty e^{-pt} dp \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t) \left(\frac{e^{-pt}}{-t} \Big|_0^\infty \right) dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt. \blacksquare$$

Следствие. Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$\int_0^\infty t^n f(t)\,dt = (-1)^{n+1}\int_0^\infty F^{(n+1)}(p)\,dp. \tag{16.34}$$

□ Согласно формуле (16.28), $F^{(n+1)}(p) \doteqdot (-1)^{n+1}t^{n+1}f(t)$. Отсюда на основании формулы (16.33) и следует справедливость равенства (16.34). ■

Пример 16. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt,\ a>0,\ b>0;$

б) $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\sin\beta t}{t}\,dt,\ \alpha\geqslant 0,\ \beta>0;$

в) $\int_0^\infty t^2 e^{-\alpha t}dt,\ \alpha>0.$

□ а) Имеем $e^{-at}-e^{-bt} \doteqdot \frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b}$. Тогда по формуле (16.33)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \int_0^\infty\left(\frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b}\right)dp = \ln\left|\frac{p+a}{p+b}\right|\Big|_0^\infty = -\ln\frac{a}{b}.$$

б) Имеем $\left(\sin\beta t \doteqdot \frac{\beta}{p^2+\beta^2}\right)\Rightarrow\left(e^{-\alpha t}\sin\beta t \doteqdot \frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}\right)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\sin\beta t}{t}\,dt \doteqdot \int_0^\infty \frac{\beta\,dp}{(p+\alpha)^2+\beta^2} = \operatorname{arctg}\frac{p+\alpha}{\beta}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}.$$

Отсюда, в частности, при $\alpha\to+0$ следует $\int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$, $\beta>0$.

в) Так как $e^{-\alpha t}\doteqdot\frac{1}{p+\alpha}$, то по формуле (16.34)

$$\int_0^\infty t^2 e^{-\alpha t}dt = (-1)^{2+1}\int_0^\infty\left(\frac{1}{p+\alpha}\right)'''dp = 6\int_0^\infty\frac{dp}{(p+\alpha)^4} = \frac{2}{\alpha^3}.$$

Предельные соотношения. При проверке правильности вычислений в операционном исчислении полезны следующие соотношения. Справедлива

Теорема 16.12. Если $f(t)$ и $f'(t)$ — оригиналы и $f(t)\doteqdot F(p)$, то

1) $\lim\limits_{\operatorname{Re}p\to\infty} pF(p) = \lim\limits_{t\to+0} f(t) = f(0);$ (16.35)

2) $\lim\limits_{p\to 0} pF(p) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t).$ (16.36)

□ 1) Так как, согласно соотношению (16.4), $\lim\limits_{\mathrm{Re}p\to\infty}\Phi(p)=0$, то из равенства

$$0=\lim_{\mathrm{Re}p\to\infty}\Phi(p)=\lim_{\mathrm{Re}p\to\infty}(pF(p)-f(0))$$

и следует формула (16.35);

2) имеем

$$\mathbf{L}\{f'(t)\}=\int_0^\infty f'(t)\,e^{-pt}dt=pF(p)-f(0).$$

Так как интеграл Лапласа сходится равномерно по p, то из этой формулы в пределе при $p\to 0$ получаем

$$\lim_{p\to 0}\int_0^\infty f'(t)\,e^{-pt}dt=\int_0^\infty f'(t)\,dt=\lim_{p\to 0}(pF(p)-f(0))$$

или

$$\left(f(t)\Big|_0^\infty=\lim_{p\to 0}pF(p)-f(0)\right)\Leftrightarrow\left(\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{p\to 0}pF(p)\right).\ \blacksquare$$

Пример 17. Найти начальное значение оригинала $f(t)$, если $F(p)=\dfrac{1}{(p+\alpha)^2}\doteq f(t)$.

□ По формуле (16.35)

$$f(0)=\lim_{\mathrm{Re}p\to\infty}pF(p)=\lim_{\mathrm{Re}p\to\infty}\frac{p}{(p+\alpha)^2}=0=(te^{-\alpha t})|_{t=0}.$$

Пример 18. Проверить справедливость предельного соотношения (16.36) для оригинала $\sin t$.

□ Так как $\lim\limits_{t\to+\infty}\sin t$ не существует, то равенство (16.36) не имеет места, хотя $\lim\limits_{p\to 0}pF(p)=\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{p}{p^2+1}=0$.

Интеграл Дюамеля*. Пусть $f_1(t)$ — непрерывный, а $f_2(t)$ — непрерывно дифференцируемый оригинал, а $F_1(p)$ и $F_2(p)$ — их изображения соответственно. Тогда по теореме Бореля $f_1(t)*f_2(t)\doteq F_1(p)F_2(p)$. Отсюда по теореме дифференцирования оригинала

$$pF_1(p)F_2(p)\doteq\frac{d}{dt}(f_1*f_2)=\frac{d}{dt}\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau. \qquad (16.37)$$

Равенство (16.37) называется *интегралом Дюамеля*.

Выполняя в интеграле (16.37) дифференцирование, получаем

$$pF_1(p)F_2(p)\doteq f_1(t)f_2(0)+\int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)\,d\tau. \qquad (16.38)$$

Равенство (16.38) называется *формулой Дюамеля*.

---

* Ж. Дюамель (1797—1872) — французский математик.

Пример 19. Найти оригинал $f(t)$ по изображению $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$.

□ Представим $F(p)$ в виде $p\dfrac{p}{p^2+1}\dfrac{1}{p^2+1}$. Так как $\sin t \doteqdot \dfrac{1}{p^2+1}$, $\cos t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+1}$, то по формулам (16.37) и (16.38)

$$p\frac{p}{p^2+1}\frac{1}{p^2+1} \doteqdot \frac{d}{dt}(\cos t * \sin t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \cos\tau \sin(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \cos t \sin 0 + \int_0^t \cos\tau \cos(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}(t\cos t + \sin t).$$

Графическое задание оригиналов. Часто оригиналы задают в виде графиков. Для получения их изображений необходимо записать оригинал аналитически. Проиллюстрируем на примере способ получения аналитического выражения для оригинала, заданного графиком.

Пример 20. По данному графику оригинала (рис. 16.6) найти его изображение.

□ Вначале найдем аналитическое выражение для $f(t)$.

а) При $t\in(0,\ a)$ функция $f(t)$ имеет вид

$$f(t)=\frac{t-a}{a}\,1(t), \tag{16.39}$$

где $1(t)$ — функция Хевисайда.

б) Для $t\in(a,\ 2a)$ имеем $f(t)=1$.

в) При $t\in(2a,\ 3a)$ получаем $f(t)=(3a-t)/a$.

г) $f(t)=0$, $t\geqslant 3a$.

Считая, что функция $f(t)$ задана формулой (16.39) для всех $t\geqslant 0$, подберем функцию $\varphi_1(t)$, такую, что $f(t)+\varphi_1(t)=1$ для $t\geqslant a$, т.е. чтобы $(t-a)/a+\varphi_1(t)=1$, $t\geqslant a$. Отсюда

$$\varphi_1(t)=-\frac{t-2a}{a}\cdot 1(t-a),$$

где $1(t-a)=\begin{cases}0, & t<a;\\ 1, & t>a\end{cases}$ — смещенная единичная функция Хевисайда.

Далее находим такую функцию $\varphi_2(t)$, чтобы в сумме с $f(t)\equiv 1$ получить функцию $(3a-t)/a$ при $t>2a$, т. е.

$$\left(1+\varphi_2(t)=\frac{3a-t}{a}\right)\Rightarrow\left(\varphi_2(t)=-\frac{t-2a}{a}\cdot 1(t-2a)\right).$$

Наконец подберем функцию $\varphi_3(t)$, такую, чтобы в сумме с $f(t)=(3a-t)/a$ получить функцию, равную нулю при $t\geqslant 3a$, т. е.

$$\left(\frac{3a-t}{a}+\varphi_3(t)=0\right)\Rightarrow\varphi_3(t)=$$

$$=\frac{t-3a}{a}\cdot 1(t-3a).$$

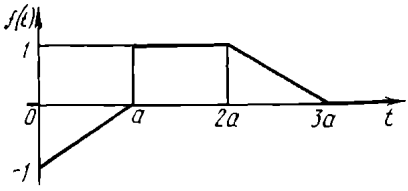


Рис. 16.6

Итак, для всех $t \geqslant 0$ имеем

$$f(t) = \frac{t-a}{a} \cdot 1(t) + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t) =$$

$$= \frac{t-a}{a} \cdot 1(t) - \frac{t-2a}{a} \cdot 1(t-a) - \frac{t-2a}{a} \cdot 1(t-2a) + \frac{t-3a}{a} \cdot 1(t-3a) =$$

$$= \frac{t-a}{a} - \frac{t-a}{a} \cdot 1(t-a) + 1(t-a) - \frac{t-2a}{a} \cdot 1(t-2a) + \frac{t-3a}{a} \cdot 1(t-3a).$$

Пользуясь свойством линейности и теоремой запаздывания, находим искомое изображение:

$$F(p) = \frac{1}{ap^2} - \frac{1}{p} - \frac{e^{-ap}}{ap^2} + \frac{e^{-ap}}{p} - \frac{e^{-2ap}}{ap^2} + \frac{e^{-3ap}}{ap^2} =$$

$$= \frac{e^{-ap}-1}{p} + \frac{1-e^{-ap}-e^{-2ap}+e^{-3ap}}{ap^2}.$$

Приведем таблицу основных оригиналов и их изображений, часто встречающихся при решении задач.

Оригинал	Изображение	Номер формулы
1	$1/p$	16.5
$e^{\alpha t}$	$1/(p-\alpha)$	16.6
t	$1/p^2$	16.7
t^n	$n!/p^{n+1}$	16.8
$\sin \beta t$	$\beta/(p^2+\beta^2)$	16.10
$\cos \beta t$	$p/(p^2+\beta^2)$	16.11
$\operatorname{sh} \beta t$	$\beta/(p^2-\beta^2)$	16.12
$\operatorname{ch} \beta t$	$p/(p^2-\beta^2)$	16.12
$e^{\alpha t} f(t)$	$F(p-\alpha)$	16.13
$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$	16.16
$f(t+a)$	$e^{ap}\left(F(p) - \int\limits_0^a f(t)\, e^{-pt}dt\right)$	16.17
$f(\lambda t)$	$\frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$	16.18
$f(t) = f(t+T)$, T —период	$\frac{\int\limits_0^T f(t)\, e^{-pt}dt}{1-e^{-pt}}$	16.19
$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(p)\, F_2(p)$	16.21
$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$	16.22
$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$	16.24
$\int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau$	$F(p)/p$	16.25
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^n(p)$	16.28
$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_p^\infty F(s)\, ds$	16.29
$\frac{d}{dt}(f_1 * f_2)$	$pF_1(p)\, F_2(p)$	16.37

16.2. НАХОЖДЕНИЕ ОРИГИНАЛА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ

Связь преобразований Фурье и Лапласа. Формула Меллина*. Пусть $f(t)$ — функция-оригинал, удовлетворяющая условию абсолютной интегрируемости на промежутке $(0, +\infty)$. Тогда существует одностороннее преобразование Фурье

$$F(i\omega) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-i\omega t} dt. \tag{16.40}$$

Применим формулу (16.40) к функции $f(t)\, e^{-\sigma t}$, где σ выбрано таким образом, чтобы сходился интеграл $\int_0^\infty |f(t)|\, e^{-\sigma t} dt$. При этих условиях существует интеграл

$$F(i\omega,\ \sigma) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-(\sigma + i\omega)t} dt. \tag{16.41}$$

Введем новую комплексную переменную $p = \sigma + i\omega$. Тогда из равенства (16.41) получим

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt = \mathbf{L}\{f(t)\},$$

где $\mathbf{L}\{f(t)\}$ — преобразование Лапласа функции $f(t)$.

Таким образом, из формулы (16.41) видно, что преобразование Лапласа можно рассматривать как результат определенным образом построенного обобщения одностороннего преобразования Фурье. Если $f(t)$ — оригинал с показателем роста σ_0, то при $\sigma > \sigma_0$ интеграл (16.41) существует.

Для преобразования (16.40) обратным преобразованием Фурье является

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega)\, e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left(\int_0^\infty f(t)\, e^{-i\omega t} dt \right) d\omega.$$

Заменим в этом равенстве $f(t)$ на $f(t)\, e^{-\sigma t}$:

$$f(t)\, e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left(\int_0^\infty f(t)\, e^{-(\sigma + i\omega)t} dt \right) d\omega.$$

Так как $p = \sigma + i\omega$, $d\omega = dp/i$, то при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ значение p изменяется от $\sigma - i\infty$ до $\sigma + i\infty$. Поэтому

$$f(t)\, e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p)\, e^{(p-\sigma)t} dp.$$

Сокращая в этом равенстве на $e^{-\sigma t}$, получаем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p)\, e^{pt} dp. \tag{16.42}$$

---

* Р. Х. Меллин (1854—1933) — финский математик.

Формула (16.42) называется *формулой Меллина* или *формулой обратного преобразования Лапласа*. Еще раз отметим, что в формуле (16.42) $\sigma > \sigma_0$.

Для вычисления интеграла Меллина (16.42) можно воспользоваться формулой (15.158), если функция $F(p)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k} (F(p)\, e^{pt}), \quad \operatorname{Re} p_k < \sigma_0, \tag{16.43}$$

(все особые точки p_k функции $F(p)$ должны лежать левее прямой $\operatorname{Re} p = \sigma_0$).

Пример 1. Найти оригинал для изображения $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

□ Эта функция удовлетворяет условиям леммы Жордана, так как $F(p) \to 0$ при $\operatorname{Re} p \to \infty$. Особыми точками ее являются $p = 0$ (полюс второго порядка), $p = -i$ и $p = i$ (простые полюсы). Поэтому функция $F(p)$ аналитична в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. Находим вычеты функции $F(p)\, e^{pt}$ в этих точках:

$$\operatorname*{Res}_{p=0} (F(p)\, e^{pt}) = \lim_{p\to 0} \left(\frac{e^{pt}}{p^2+1}\right)'_p = t;$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-i} (F(p)\, e^{pt}) = \lim_{p\to -i} \frac{e^{pt}}{p^2(p-i)} = \frac{e^{-it}}{2i};$$

$$\operatorname*{Res}_{p=i} (F(p)\, e^{pt}) = \lim_{p\to i} \frac{e^{pt}}{p^2(p+i)} = -\frac{e^{it}}{2i}.$$

По формуле (16.43)

$$f(t) = t - \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = t - \sin t.$$

Оригиналы для рациональных функций. Формулы разложения. Рассмотрим случай, когда изображение $F(p)$ представляет собой правильную рациональную функцию:

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \ldots + a_{m-1}p + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \ldots + b_{n-1}p + b_n}, \quad m < n. \tag{16.44}$$

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_l$ — корни знаменателя $B(p)$ кратности $k_1, k_2, \ldots, k_l$ соответственно $(k_1 + k_2 + \ldots + k_l = n)$. Тогда справедливо представление

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \ldots + a_{m-1}p + a_m}{b_0 (p-p_1)^{k_1} (p-p_2)^{k_2} \ldots (p-p_l)^{k_l}}, \tag{16.45}$$

т. е. $p = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, являются полюсами порядка k_i функции $F(p)$. Так как в этом случае

$$\operatorname*{Res}_{p=p_i} (F(p)\, e^{pt}) = \frac{1}{(k_i-1)!} \lim_{p\to p_i} \frac{d^{k_i-1}}{dp^{k_i-1}} ((p-p_i)^{k_i} F(p)\, e^{pt}),$$

то по формуле (16.43) получаем *основную формулу разложения*:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{(k_i-1)!} \lim_{p\to p_i} \frac{d^{k_i-1}}{dp^{k_i-1}} \left((p-p_i)^{k_i} F(p)\, e^{pt}\right). \tag{16.46}$$

Если $p = p_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — простые полюсы функции $F(p)$, то, согласно формуле (15.126), $\operatorname{Res}\limits_{p=p_k} F(p) = \lim\limits_{p \to p_k} (p - p_k) F(p)$, и равенство (16.43) принимает вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \lim_{p \to p_k} \left((p - p_k) F(p) \right) e^{p_k t}. \tag{16.47}$$

Аналогично если p_k — простые полюсы функции $F(p)$, то, учитывая выражение $\operatorname{Res}\limits_{p=p_k} \dfrac{A(p)}{B(p)} = \dfrac{A(p_k)}{B'(p_k)}$, из равенства (16.43) получаем еще одну формулу для оригинала:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{16.48}$$

Формулы (16.47), (16.48) также называются *формулами разложения.*

Пример 2. Найти оригинал по заданному изображению:

а) $F_1(p) = \dfrac{2p}{(p^2 + 4p + 8)^2}$; б) $F_2(p) = \dfrac{1}{p(p^3 + 1)}$;

в) $F_3(p) = \dfrac{6p^2}{(p + 2)(p - 1)(p^2 + 1)}$.

□ а) Знаменатель $B(p) = (p^2 + 4p + 8)^2$ имеет двукратный корень $-2 + 2i$ и $-2 - 2i$. Находим вычеты функции $F_1(p) e^{pt}$ в этих точках:

$$\operatorname*{Res}_{p=-2+2i} (F_1(p) e^{pt}) = \lim_{p \to (-2+2i)} \left(\frac{2pe^{pt}(p + 2 - 2i)^2}{(p^2 + 4p + 8)^2} \right)'_p = \frac{e^{(-2+2i)t}(1 - 2t(1+i)}{-8i}$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-2-2i} (F_1(p) e^{pt}) = \lim_{p \to (-2-2i)} \left(\frac{2pe^{pt}(p + 2 + 2i)^2}{(p^2 + 4p + 8)^2} \right)' =$$

$$= \frac{e^{(-2-2i)t}(1 - 2t(1 - i))}{8i}.$$

По формуле (16.46) получаем оригинал:

$$f_1(t) = \frac{e^{(-2+2i)t}(1 - 2t(1 + i))}{-8i} + \frac{e^{(-2-2i)t}(1 - 2t(1 - i))}{8i} =$$

$$= \frac{e^{-2t}}{4}((2t - 1)\sin 2t + 2t\cos 2t).$$

б) Знаменатель $B(p) = p(p^3 + 1)$ имеет простые корни $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ и $p_4 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$. Так как $\operatorname{Res}\limits_{p=p_k} \dfrac{A(p)}{B(p)} = \dfrac{A(p_k)}{B'(p_k)} = \dfrac{1}{4p_k^3 + 1}$, то

$$\operatorname*{Res}_{p=0} \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{1}{4p^3 + 1}\bigg|_{p=0} = 1, \quad \operatorname*{Res}_{p=-1} \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{1}{4p^3 + 1}\bigg|_{p=-1} = -\frac{1}{3};$$

$$\operatorname*{Res}_{p=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}} \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{1}{4p^3+1}\Big|_{p=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{3}.$$

По формуле (16.48) получаем оригинал:

$$f_2(t) = 1e^{0t} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}\left(e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)t} + e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)t}\right) =$$

$$= 1 - \frac{e^{-t}}{3} - \frac{2e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t}{3}.$$

в) Функция $F_3(p)$ имеет простые полюсы $p_1 = -2$, $p_2 = 1$, $p_{3,4} = \pm i$. В этом случае удобнее воспользоваться формулой разложения (16.47). Имеем

$$f_3(t) = \frac{6p^2e^{pt}}{(p-1)(p^2+1)}\Big|_{p=-2} + \frac{6p^2e^{pt}}{(p+2)(p^2+1)}\Big|_{p=1} +$$

$$+ \frac{6p^2e^{pt}}{(p+2)(p-1)(p+i)}\Big|_{p=i} + \frac{6p^2e^{pt}}{(p+2)(p-1)(p-i)}\Big|_{p=-i} =$$

$$= -\frac{8}{5}e^{-2t} + e^t + \frac{3}{1+3i}e^{it} + \frac{3}{1-3i}e^{-it} =$$

$$= -\frac{8}{5}e^{-2t} + e^t + \frac{3}{5}(\cos t + 3\sin t).$$

В некоторых случаях можно найти оригинал $f(t)$, если его изображение $F(p)$ разложимо в ряд по степеням $1/p$.

Справедлива

Теорема 16.13 (разложения). Если $F(p)$ — аналитическая функция в окрестности точки $p = \infty$ и $\lim\limits_{\mathrm{Re}p\to\infty} F(p) = 0$ и ряд Лорана имеет вид

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n}, \tag{16.49}$$

то оригиналом $f(t)$ является функция

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!}t^{n-1}, \tag{16.50}$$

причем этот ряд сходится при всех t.

□ Заметим, что ряд (16.50) формально получается из ряда (16.49) при условии, что $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \doteq \frac{1}{p^n}$.

Введем новую переменную $1/p = z$. Тогда функция $F(1/z) = \Phi(z)$ представится рядом $\Phi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, сходящимся в некотором круге $|z| < R$. В этом круге функция $\Phi(z)$ является аналитической. Согласно оценке (15.95), для коэффициентов ряда имеем $|c_n| \leqslant M_R/R^n$, $n = 1, 2, \ldots$, где $M_R = \max\limits_{|z|=R} |\Phi(z)|$. Тогда

$$|f(t)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!}t^{n-1}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{(n-1)!}|t|^{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_R}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|t|^n}{n!R^n} = \frac{M_R}{R}e^{|t|/R}.$$

Отсюда получаем, что ряд (16.50), в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно при всех t, т. е. $f(t)$ — оригинал для $F(p)$.

Пример 3. Найти оригинал для функции $F(p) = 1/\sqrt{p^2+1}$.

□ Разложим $F(p)$ в биномиальный ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\frac{1}{p^{2n}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}\frac{1}{p^{2n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdots(2n-1)\,2n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\cdot 2^n\cdot n!\cdot p^{2n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}\frac{1}{p^{2n+1}}. \qquad (16.51)$$

Так как $(2n)!/p^{2n+1} \doteqdot t^{2n}$, по теореме разложения 16.13 из ряда (16.51) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \doteqdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n} = J_0(t),$$

где $J_0(t)$ — функция Бесселя.

Итак, $J_0(t) \doteqdot \dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$.

Так как $J_1(t) = -J_0'(t)$ и $J_0(0) = 1$, то

$$J_1(t) = -J_0'(t) \doteqdot -\left(pF(p) - J_0(0)\right) = \frac{-p}{\sqrt{p^2+1}} + 1 = \frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}.$$

По индукции можно получить формулу

$$J_n(t) \doteqdot \frac{\left(\sqrt{p^2+1}-1\right)^n}{\sqrt{p^2+1}},\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

На практике удобен следующий способ нахождения оригиналов для изображений, являющихся рациональными функциями: функцию разлагают на простейшие дроби и, используя таблицу основных оригиналов и их изображений, находят искомый оригинал.

Пример 4. Найти оригинал по его изображению:

а) $F_1(p)\ \dfrac{3p^2+p-1}{(p-1)(p+2)p}$; б) $F^2(p) = \dfrac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$.

□ а) Так как

$$\frac{3p^2+p-1}{(p-1)(p+2)p}=\frac{1}{p-1}-\frac{3}{2(p+2)}+\frac{1}{2p};$$

$$\frac{1}{p-1}\doteqdot e^t;\quad \frac{1}{p+2}\doteqdot e^{-2t};\quad \frac{1}{p}\doteqdot 1,$$

то $F_1(p)\doteqdot e^t-\frac{3}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}=f_1(t)$.

б) Аналогично из разложения

$$\frac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}=\frac{1}{2(p+1)}+\frac{-p+5}{2(p^2-2p+5)}=\frac{1}{2(p+1)}-$$

$$-\frac{p-1}{2((p-1)^2+2^2)}+\frac{4}{2((p-1)^2+4)};$$

$$\frac{1}{p+1}\doteqdot e^{-t};\quad \frac{p-1}{(p-1)^2+4}\doteqdot e^t\cos 2t;\quad \frac{1}{(p-1)^2+4}\doteqdot e^t\sin 2t$$

получим

$$F_2(p)\doteqdot\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^t(\cos 2t-4\sin 2t)=f_2(t).$$

16.3. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОПЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{L}[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(t),\qquad(16.52)$$

где $y=y(t)$, $t\geqslant 0$.

Требуется найти решение уравнения (16.52), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0)=y_0;\ y'(0)=y_0';\ \ldots;\ y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)}.\qquad(16.53)$$

Если правая часть $f(t)$ уравнения (16.52) — оригинал, то очевидно, что и решение $y(t)$ этого уравнения является оригиналом. Пусть $y(t)\doteqdot Y(p)$. Преобразуем уравнение (16.52) по Лапласу. Согласно формуле (16.24), с учетом начальных условий (16.53), будем иметь

$$y^{(n)}(t)\doteqdot pY(p)-p^{n-1}y_0-p^{n-2}y_0'-\ldots-y_0^{(n-1)};$$

$$a_1y^{(n-1)}(t)\doteqdot a_1\left(p^{n-1}Y(p)-p^{n-2}y_0-p^{n-3}y_0'-\ldots-y_0^{(n-2)}\right);$$

. . . . . .

$$a_{n-1}y'(t)\doteqdot a_{n-1}(pY(p)-y_0);$$

$$a_ny(t)\doteqdot a_nY(p).$$

Сложив эти равенства, получим

$$\mathbf{L}[y]\doteqdot(p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n)Y(p)-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\left(p^k+a_1p^{k-1}+\ldots+a_{k-1}p+a_k\right)y_0^{(n-1-k)}.\qquad(16.54)$$

Так как $f(t) \doteqdot F(p)$, то, согласно соотношению (15.54), преобразованное уравнение принимает вид

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n) Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1} (p^k + a_1 p^{k-1} + \ldots + a_k) y_0^{(n-1-k)} = F(p). \quad (16.55)$$

Уравнение (16.55) называется *операторным*. Из него находим изображение решения:

$$Y(p) = \frac{F(p)}{L(p)} + \frac{1}{L(p)} \sum_{k=0}^{n-1} (p^k + a_1 p^{k-1} + \ldots + a_k) y_0^{(n-1-k)}, \quad (16.56)$$

где $$L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1} p + a_n. \quad (16.57)$$

Заметим, что $L(p)$ получено формально заменой $y^{(k)}$ на p^k, $k = 0, 1, \ldots, n$, в дифференциальном операторе левой части уравнения (16.52), т. е. $L(p)$ — характеристический многочлен этого уравнения.

По изображению $Y(y)$ находим оригинал $y(t)$ — решение уравнения (16.52).

Пример 1. Решить задачу Коши

$$y'' + 2y' + y = e^{-t}(\cos t + t); \; y(0) = y'(0) = 2. \quad (16.58)$$

□ Пусть $y(t) \doteqdot Y(p)$. Преобразуем уравнение (16.58) по Лапласу. Учитывая начальные условия, имеем:

$$y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p) - 2;$$

$$y''(t) \doteqdot p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 2p - 2.$$

Для правой части уравнения получаем

$$e^{-t}(\cos t + t) = e^{-t} \cos t + e^{-t} t \doteqdot \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Тогда в силу уравнения (16.58)

$$p^2 Y(p) - 2p - 2 + 2pY(p) - 4 + Y(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{1}{(p+1)^2}$$

или

$$(p^2 + 2p + 1) Y(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{1}{(p+1)^2} + 2p + 6.$$

Отсюда изображение решения

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2+2p+2)(p+1)} + \frac{1}{(p+1)^4} + \frac{2}{p+1} + 4\frac{1}{(p+1)^2}.$$

Перейдем теперь к оригиналу-решению $y(t)$. Имеем:

$$\frac{1}{(p^2+2p+2)(p+1)} = \frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{(p+1)^2+1} \doteqdot e^{-t} - e^{-t} \cos t;$$

$$\frac{1}{(p+1)^4} \doteqdot e^{-t} \frac{t^3}{3!}; \quad \frac{2}{p+1} \doteqdot 2e^{-t}; \quad \frac{4}{(p+1)^2} \doteqdot 4te^{-t}.$$

Итак, $y(t) = e^{-t} - e^{-t} \cos t + \frac{t^3}{6} e^{-t} + 2e^{-t} + 4te^{-t} = e^{-t}\left(\frac{t^3}{6} + 4t - \right.$

$\left. - \cos t + 3\right)$.

Если в задаче Коши за начальный момент выбрано значение $t = t_0 \neq 0$, то с помощью замены $\tau = t - t_0$ ее можно свести к задаче Коши при $\tau = 0$.

Пример 2. Решить задачу Коши:

$$y'' + y = -\sin 2t; \quad y(\pi) = y'(\pi) = 1. \tag{16.59}$$

□ Введем замену $(\tau = t - \pi) \Rightarrow (t = \tau + \pi)$. Тогда исходная задача Коши (16.59) сводится к задаче

$$y'' + y = -\sin 2(\tau + \pi) = -\sin 2\tau; \quad y(0) = y'(0) = 1, \tag{16.60}$$

где $y = y(\tau)$.

Пусть $y(\tau) \doteqdot Y(p) = Y$. Перейдя в уравнении (16.60) к изображениям, получим $(p^2 + 1)Y - p - 1 = -2/(p^2 + 4)$. Отсюда

$$Y = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} - \frac{2}{(p^2+4)(p^2+1)} = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{p^2+1} +$$

$$+ \frac{2}{3}\frac{1}{p^2+4} \doteqdot \cos\tau + \frac{\sin\tau}{3} + \frac{2\sin 2\tau}{3} = \cos(t-\pi) + \frac{\sin(t-\pi)}{3} +$$

$$+ \frac{2\sin(2t-2\pi)}{3} = -\cos t - \frac{1}{3}\sin t + \frac{2}{3}\sin 2t = y(t).$$

Применение формулы Дюамеля к решению дифференциальных уравнений. Рассмотрим задачу Коши:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(t); \tag{16.61}$$

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0, \tag{16.62}$$

где a_i — постоянные коэффициенты, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Перейдем в уравнении (16.61) к изображению. Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$, $y(t) \doteqdot Y(p)$. Учитывая начальные условия (16.62), получаем

$$L(p)\,Y(p) = F(p), \tag{16.63}$$

где $L(p)$ имеет вид (16.57).

Наряду с задачей Коши (16.61), (16.62) рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\left.\begin{aligned} &z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}z' + a_n z = 1; \\ &z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(n-1)}(0) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{16.64}$$

где $z = z(t)$.

Пусть $z(t) \doteqdot Z(p)$. Тогда операторное уравнение для уравнения (16.64) будет иметь вид

$$L(p)\,Z(p) = 1/p. \tag{16.65}$$

Из операторных уравнений (16.63), (16.65) находим

$$Y(p) = pF(p)\,Z(p).$$

Отсюда по формуле Дюамеля (16.37) для решения $y(t)$ исходной задачи Коши (16.61), (16.62) получаем

$$y(t) = \frac{d}{dt}(f(t) * z(t)) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\,z(t-\tau)\,d\tau = f(t)\,z(0) +$$

$$+\int_0^t f(\tau)\frac{d}{dt}(z(t-\tau))\,d\tau=\int_0^t f(\tau)\,z_t'(t-\tau)\,d\tau,$$

так как $z(0)=0$.

Итак, искомое решение имеет вид

$$y(t)=\int_0^t f(\tau)\,z_t'(t-\tau)\,d\tau. \tag{16.66}$$

Пример 3. Найти решение задачи Коши:

$$y''+4y'+4y=\frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2};\ y(0)=y'(0)=0. \tag{16.67}$$

□ Здесь $f(t)=e^{-2t}/(1+2t)^2$.

Решим сначала вспомогательную задачу

$$z''+4z'+4z=1;\ z(0)=z'(0)=0. \tag{16.68}$$

Пусть $z(t)\doteqdot Z(p)$. Перейдя в уравнении (16.68) к изображениям, получим

$$(p^2+4p+4)\,Z(p)=\frac{1}{p}\Rightarrow Z(p)=\frac{1}{p(p+2)^2}=\frac{1}{4p}-\frac{1}{2(p+2)^2}-$$

$$-\frac{1}{4(p+2)}.$$

Отсюда $z(t)=\frac{1}{4}-\frac{te^{-2t}}{2}-\frac{e^{-2t}}{4}$. По формуле (16.66) записываем искомое решение задачи Коши (16.67):

$$y(t)=\int_0^t\frac{e^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}-\frac{(t-\tau)\,e^{-2(t-\tau)}}{2}-\frac{e^{-2(t-\tau)}}{4}\right)d\tau=$$

$$=\int_0^t\frac{e^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2}(t-\tau)\,e^{-2(t-\tau)}\,d\tau=e^{-2t}\int_0^t\frac{(t-\tau)}{(1+2\tau)^2}\,d\tau=$$

$$=\frac{e^{-2t}}{4}(2t-\ln(1+2t)).$$

Замечание. Вследствие коммутативности свертки решение $y(t)$ задачи Коши (16.61), (16.62) можно записать также в виде

$$y(t)=\frac{d}{dt}(z(t)*f(t))=\frac{d}{dt}\int_0^t z(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=z(t)\,f(0)+\int_0^t z(\tau)\,f_t'(t-\tau)\,d\tau. \tag{16.69}$$

Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Схема решения таких систем та же, что и для линейных дифференциальных уравнений порядка n. Каждое из уравнений системы преобразуется по Лапласу, а затем получившаяся система линейных алгебраических уравнений решается относительно изображения решения.

Пусть требуется решить систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами ($x_k = x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t);\\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t);\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{aligned}\right\}$$

при начальных условиях $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$, ..., $x_n(0) = x_{n0}$.

Обозначив через $X_k = X_k(p)$ и $F_k(p)$ — изображения функций $x_k(t)$ и $f_k(t)$, соответственно от системы дифференциальных уравнений перейдем к операторной системе:

$$\left.\begin{aligned} (p - a_{11})X_1 - a_{12}X_2 - \ldots - a_{1n}X_n &= F_1(p) + x_{10};\\ -a_{21}X_1 + (p - a_{22})X_2 - \ldots - a_{2n}X_n &= F_2(p) + x_{20};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ -a_{n1}X_1 - a_{n2}X_2 - \ldots + (p - a_{nn})X_n &= F_n(p) + x_{n0}, \end{aligned}\right\}$$

являющейся линейной алгебраической системой уравнений относительно $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Решив ее, найдем $X_k = X_k(p)$, а затем их оригиналы $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

По этой же схеме решаются линейные системы с постоянными коэффициентами и более высокого порядка.

Пример 4. Решить задачу Коши:

$$\left.\begin{aligned} x' - 2x - 3y &= 5t;\\ y' - 3x - 2y &= 8e^t, \end{aligned}\right\} \quad x(0) = 0,\ y(0) = 1.$$

□ Пусть $x(t) \doteqdot X(p)$, $y(t) \doteqdot Y(p)$. Тогда операторная система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} pX(p) - 2X(p) - 3Y(p) &= 5/p^2;\\ pY(p) - 1 - 3X(p) - 2Y(p) &= 8/(p-1) \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} (p-2)X(p) - 3Y(p) &= 5/p^2;\\ -3X(p) + (p-2)Y(p) &= 8/(p-1) + 1. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему относительно $X(p)$ и $Y(p)$, находим:

$$X(p) = \frac{3p^3 + 26p^2 - 15p + 10}{(p^2-1)(p-5)p^2};$$

$$Y(p) = \frac{p^4 + 5p^3 - 14p^2 + 15p - 15}{(p^2-1)(p-5)p^2}.$$

Применив формулу разложения (16.43), получим

$$x(t) = \operatorname*{Res}_{p=0}[X(p)e^{pt}] + \operatorname*{Res}_{p=-1}[X(p)e^{pt}] +$$

$$+ \operatorname*{Res}_{p=1}[X(p)e^{pt}] + \operatorname*{Res}_{p=5}[X(p)e^{pt}] = -\frac{13}{5} + 4e^{-t} + 3e^t + \frac{8}{5}e^{5t} + 2t.$$

Аналогично

$$y(t) = \frac{12}{5} - 3t + e^t - 4e^{-t} + \frac{8}{5}e^{5t}.$$

Решение интегральных уравнений типа свертки операционным методом. *Интегральным* называется уравнение, содержащее искомую функцию под знаком интеграла. Уравнение вида

$$y(t) + \int_0^t y(\tau) K(t-\tau) d\tau = f(t) \tag{16.70}$$

называется *интегральным уравнением типа свертки*. Здесь $y(t)$ — искомая неизвестная функция, $f(t)$ — свободный член (правая часть), $K(t-\tau)$ — *ядро* уравнения.

Предположим, что $y(t)$, $f(t)$ и $K(t)$ — оригиналы. Перейдем в уравнении (16.70) к изображениям. Пусть $y(t) \doteqdot Y(p)$, $f(t) \doteqdot F(p)$ и $K(t) \doteqdot Q(p)$. Так как интеграл в уравнении (16.70) представляет свертку оригиналов $y(t)$ и $K(t)$, по теореме Бореля

$$Y(p) + Y(p) Q(p) = F(p).$$

Отсюда $Y(p) = \dfrac{F(p)}{1+Q(p)}$ — изображение искомого решения $y(t)$ интегрального уравнения (16.70). Само решение может быть получено с помощью методов, изложенных выше.

Пример 5. Решить интегральное уравнение

$$y(t) + 2\int_0^t y(\tau) \cos(t-\tau)\, d\tau = e^t. \tag{16.71}$$

□ Пусть $y(t) \doteqdot Y(p)$. Так как $e^t \doteqdot 1/(p-1)$, $\cos t \doteqdot p/(p^2+1)$, то, перейдя в уравнении (16.71) к изображениям, получаем

$$Y(p) + \frac{2pY(p)}{p^2+1} = \frac{1}{p-1}.$$

Отсюда

$$Y(p) = \frac{p^2+1}{(p-1)(p+1)^2} = \frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{2(p+1)} \doteqdot$$

$$\doteqdot \frac{1}{2} e^t - te^{-t} - \frac{1}{2} e^{-t} = \operatorname{sh} t - te^{-t} = y(t)$$

есть искомое решение уравнения (16.71).

Операционный метод решения уравнений математической физики. Решение уравнения теплопроводности. Рассмотрим следующую задачу: найти решение $u = u(x, t)$ уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{16.72}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) \tag{16.73}$$

и граничным условиям

$$u(0, t) = \psi_1(t);\ u(l, t) = \psi_2(t). \tag{16.74}$$

Пусть $u(x, t)$; $u''_{xx}(x, t)$, $f(x, t)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ — оригиналы и

$$u(x,\ t) \doteqdot U(x,\ p) = \int_0^\infty u(x,\ t)\, e^{-pt} dt;$$

$$f(x,\ t) \doteqdot F(x,\ p);\ \psi_1(t) \doteqdot \Psi_1(p);\ \psi_2(t) \doteqdot \Psi_2(p).$$

Тогда

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{dx} \doteqdot \int_0^\infty \frac{\partial u}{dx} e^{-pt} dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u(x,\ t)\, e^{-pt} dt = \frac{\partial U(x,\ p)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2} \doteqdot \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt} dt = \frac{\partial^2 U(x,\ p)}{\partial x^2}. \tag{16.75}$$

Далее, учитывая начальное условие (16.73), имеем

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} \doteqdot pU(x,\ p) - u(x,\ 0) = pU(x,\ p) - \varphi(x). \tag{16.76}$$

Для изображения $U(x,\ p)$ из граничных условий (16.74) получаем:

$$U(0,\ p) = \Psi_1(p);\ U(l,\ p) = \Psi_2(p). \tag{16.77}$$

Перейдем в уравнении (16.72) к изображениям. Учитывая равенства (16.75) и (16.76), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a^2 \frac{d^2U}{dx^2} - pU + \varphi(x) + F(x,\ p) = 0. \tag{16.78}$$

Таким образом, операционный метод приводит решение краевой задачи (16.72) — (16.74) к решению уравнения (16.78) при граничных условиях (16.77). Решив его, найдем изображение $U(x,\ p)$. Тогда обратным преобразованием Лапласа восстановим искомое решение $u(x,\ t)$ краевой задачи (16.72) — (16.74).

Решение волнового уравнения. Проиллюстрируем этот метод на конкретной задаче.

Пример 6. Решить волновое уравнение ($u = u(x,\ t)$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ 0 \leqslant x \leqslant l;\ t > 0, \tag{16.79}$$

при начальных условиях

$$u(x,\ 0) = A \sin \frac{\pi x}{l};\ \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t} = 0 \tag{16.80}$$

и краевых условиях

$$u(0,\ t) = u(l,\ t) = 0. \tag{16.81}$$

□ Пусть $U(x,\ p)$ — изображение искомого решения $u(x,\ t)$. Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteqdot \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty u(x,\ t)\, e^{-pt} dt = \frac{\partial^2 U(x,\ p)}{\partial x^2}.$$

Согласно правилу дифференцирования оригинала и начальным условиям (16.80), находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \doteq p^2 U(x, p) - pA \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Переходя в уравнении (16.79) к изображениям, получаем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{p^2}{a^2} U = -\frac{pA}{a^2} \sin \frac{\pi x}{l}, \tag{16.82}$$

а из краевых условий (16.81)

$$U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0. \tag{16.83}$$

Решая уравнение (16.82), получаем

$$U(x, p) = C_1 e^{px/a} + C_2 e^{-px/a} + \frac{Ap}{p^2 + a^2\pi^2/l^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Отсюда, учитывая краевые условия (16.83), находим

$$U(x, p) = \frac{Ap}{p^2 + a^2\pi^2/l^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Оригинал для этого изображения — функция $u(x, t) = A \cos \frac{\pi a}{l} t \sin \frac{\pi x}{l}$, являющаяся искомым решением задачи (16.79) — (16.81).

ЛИТЕРАТУРА

Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1964.— 288 с.

Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.— М.: Наука, 1981.— 448 с.

Будак Б. М., Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды.— М.: Наука, 1965.— 608 с.

Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости (задачи и упражнения).— М.: Наука, 1981.— 304 с.

Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: В 2 т.— М.: Высш. шк., 1981.— Т. 2.— 687 с.

Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 2 т.— М.: Наука, 1970.— Т. 2.— 671 с.

Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1982.— 488 с.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1972.— 736 с.

Чудесенко В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики.— М.: Высш. шк., 1983.— 112 с.

Шахно К. У. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления.— Мн.: Выш. шк., 1975.— 400 с.